

COURS : Représentation numérique et traitement des données

1. Le système binaire

• Pour compter, les êtres humains utilisent habituellement depuis quelques siècles le *système décimal* (ou *système de base 10*) qui comporte 10 chiffres que l'on compose pour pouvoir écrire n'importe quel entier.

Ainsi :

- Le nombre *sept cent cinquante-trois* s'écrit 753 en système décimal car

$$\boxed{7} \times 10^2 + \boxed{5} \times 10 + \boxed{3} \text{ donne bien sept cent cinquante-trois.}$$

- Le nombre *huit mille quatre cent cinquante-six* s'écrit 8456 en système décimal

$$\boxed{8} \times 10^3 + \boxed{4} \times 10^2 + \boxed{5} \times 10 + \boxed{6} \text{ donne bien huit mille quatre cent cinquante-six.}$$

• L'informatique utilise des courants électriques, des aimantations, des rayons lumineux... Chacun de ces phénomènes physiques ne met en jeu deux états possibles : tension nulle ou tension non nulle pour les circuits électroniques ; aimantation dans un sens ou dans l'autre pour les disques durs ; lumière ou absence de lumière pour la lecture optique des CD, DVD... Il suffit donc de deux chiffres pour traduire ces deux états. La représentation des données en informatique se base donc depuis le début sur un *système de base 2*, appelé *système binaire*, qui n'utilise que les chiffres 0 et 1. Les chiffres (0 ou 1) qui composent un nombre écrit en système binaire s'appellent des *bits*.

Ainsi :

- Le nombre binaire 101 (comportant donc 3 bits) correspond au nombre décimal car $\boxed{1} \times 2^2 + \boxed{0} \times 2 + \boxed{1} = \dots$

- Le nombre binaire 110101 (comportant donc 6 bits) correspond au nombre décimal car $\boxed{1} \times 2^5 + \boxed{1} \times 2^4 + \boxed{0} \times 2^3 + \boxed{1} \times 2^2 + \boxed{0} \times 2 + \boxed{1} = \dots$

► Exercice n°1

- Donner l'écriture en système décimal du nombre binaire 110.

Réponse :

- Donner l'écriture en système décimal du nombre binaire 1110001.

Réponse :

- Donner l'écriture en système binaire du nombre 3.

Réponse :

- Donner l'écriture en système binaire du nombre 18.

Réponse :

- Quel est le plus grand nombre, en système décimal, que l'on peut obtenir à partir d'un nombre binaire formé de 8 bits ?

Réponse :

.....

► Exercice n°2

- Donner l'écriture en système décimal du nombre binaire 11.

Réponse :

- Donner l'écriture en système décimal du nombre binaire 111.

Réponse :

3. Donner le résultat, en système décimal, de la somme et du produit des deux nombres précédents, puis convertir les résultats en écriture binaire :

Somme en système décimal :

Somme convertie en écriture binaire :

Produit en système décimal :

Produit converti en écriture binaire :

2. Les unités en informatique

L'octet

En informatique, l'unité d'information de base est un nombre binaire composé de 8 bits et appelé *octet* (*byte* en anglais).

A partir des octets s'est construit historiquement et de façon un peu confuse un double système d'unités basé l'un sur les traditionnelles puissances de 10 et l'autre sur des puissances de 2. Cela a conduit à introduire deux notations différentes pour les multiples d'octets (mais la confusion demeure souvent présente) :

Avec des puissances de 10

1 ko (kilooctet) : 1000 octets (10^3)
 1 Mo (mégaoctet) : 1 million d'octets (10^6)
 1 Go (gigaoctet) : 1 milliard d'octets (10^9)

Avec des puissances de 2

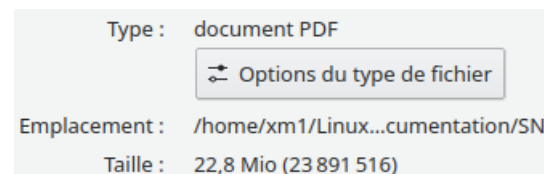
1 kio (kibiocet) : 1024 octets (2^{10})
 1 Mio (mébiocet) : 1048576 octets (2^{20})
 1 Gio (gibiocet) : 1073741824 octets (2^{30})

► Exercice n°3

1. Un fabricant annonce une capacité de stockage de 128 Go sur un smartphone. Combien de Gio cela représente-t-il?

Réponse :

2. D'après la capture d'écran des propriétés d'un fichier ci-dessous, vérifier que la taille du fichier donnée en Mio est exacte et donner la taille en Mo.



Réponse :

► Exercice n°4

Compléter le script python ci-dessous pour que la fonction `conversion` retourne la taille en Kio et préciser ce qu'affichera alors le script une fois exécuté.

Script python

```
def conversion(tailleko):
    return .....

print(conversion(250))
```

Adresse IP - Protocole TCP/IP

- Dès qu'un appareil se connecte à un réseau (local ou directement à Internet), il se voit attribuer un numéro unique appelé *adresse IP* qui permet de l'identifier de façon unique sur le réseau et de permettre ainsi les échanges de données entre tous les systèmes connectés au réseau (ordinateurs, serveurs, téléphones portables etc...)
 - L'adresse IP ne dépend pas du matériel : c'est un simple identifiant de réseau qui n'est pas forcément fixe. Sur Internet, elle permet cependant à n'importe quel site de connaître le fournisseur d'accès (FAI), la région et le pays d'origine d'un internaute. Par contre, dans les pays démocratiques, il faut une décision de justice ou administrative pour qu'un fournisseur d'accès à internet dévoile le nom et les coordonnées d'un internaute à partir de son adresse IP. Un VPN (« virtual private network ») permet de masquer son adresse IP et sa localisation, mais cela ralentit la connexion internet et nécessite un prestataire qui fournisse un service de qualité et de confiance (souvent payant).
- Pour que deux systèmes connectés (ordinateurs, serveurs, etc.) sur internet puissent échanger des données et communiquer entre eux, ils doivent respecter un certain « langage » de communication appelé *TCP/IP* qui se composent :
 - du protocole *TCP* (pour « ») qui se charge de récupérer les données à envoyer, de les fractionner en paquets et de trouver le moyen de les envoyer au bon destinataire;
 - du protocole *IP* (pour « ») qui s'occupe de la localisation du destinataire à partir de son adresse IP lors de l'envoi des paquets TCP.

► Exercice n°5

1. Les adresses IP classiques (norme IPv4) sont composées de quatre nombres compris entre 0 et 255 séparés par un point. Exemple : 204.35.129.3.
Combien d'octets cela représente-t-il?

Combien d'adresses IP différentes cette norme IPv4 permet-elle d'utiliser?
.....

2. Pour faire face à la pénurie d'adresses IPv4, une nouvelle norme, appelée IPv6 a été établie afin de remplacer progressivement les anciennes adresses IPv4. Les adresses IPv6 sont basées sur 128 bits.

Combien d'octets cela représente-t-il?

Combien d'adresses IP différentes cette norme IPv6 permet-elle d'utiliser?
.....

— Adresse MAC —

Les matériels connectés possèdent aussi un autre identifiant, l'adresse MAC (pour « »), qui à la différence de l'adresse IP, sert à identifier de façon unique le matériel (sa carte réseau) et non pas une connexion. Cet identifiant est fixe et existe que le matériel soit connecté ou non. Il permet, entre autres, d'interdire ou d'autoriser l'accès de certains matériels au réseau.

► Exercice n°6

Une adresse MAC est codée sur l'équivalent de 6 octets. Combien d'adresses MAC différentes sont possibles?

► Exercice n°7

À son domicile, le téléphone portable d'un individu est connecté à internet via le wifi de sa box internet. Quand il sort de son domicile et que la connexion à internet utilise le réseau 4G de son opérateur, quelle adresse change? L'adresse IP ou l'adresse MAC?

► Exercice n°8

Les débits de transfert de données sont souvent exprimés en MégaBits (1 million de bits) par seconde. Un individu souhaite transférer un morceau de musique de 7,5 Mio via une connexion bluetooth au débit de 2 MégaBits par seconde. Combien de temps cela prendra-t-il?

Réponse :

3. Représentation numérique des caractères et des textes

Pour représenter un caractère, on lui attribue un nombre. Un texte simple devient alors une liste de nombres que les systèmes numériques peuvent alors traiter en données binaire. Il existe plusieurs manières de coder numériquement un texte : c'est ce qu'on appelle définir l'encodage du texte.

— Le code ASCII —

Un des plus anciens et classiques encodage de texte est l'ASCII (« American Standard Code for Information Interchange ») qui permet de coder jusqu'à 128 caractères standards (ne nécessitant donc que 7 bits, même si dans les faits on utilise un octet complet pour des raisons pratiques). Extrait du code ASCII :

Caractères		!	"	#	\$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/	0	1	2
Code	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Caractères	3	4	5	6	7	8	9	:	;	i	=	¿	?	@	A	B	C	D	E
Code	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69

Caractères	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Code	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88

Caractères	Y	Z	[	\	]	^	_	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
Code	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107

Caractères	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	—	}	~
Code	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126

Ainsi le caractère A est codé par le nombre 65 qui donne en binaire 1000001.

► Exercice n°9

1. Donner la liste des trois nombres permettant de coder en ASCII le texte *SNT*.

Réponse :

2. Donner la représentation en binaire de ces 3 nombres

Réponse :

.....

.....

► Exercice n°10

En comptant un octet par caractère, combien de caractères peut contenir un texte pesant 56 kio encodé en ASCII?

Réponse :

► Remarques :

- En python, l'instruction `ord('A')` permet de retrouver le code *ASCII* du caractère A et inversement, l'instruction `chr(65)` permet de retrouver le caractère A à partir de son code *ASCII*.
- L'encodage *ASCII* ne permettant pas de coder les lettres accentuées et tous les caractères spéciaux des différentes langues, il a été créé ensuite d'autres encodages adaptés à chaque type de langue (l'encodage *ISO-8859-1* pour le français, par exemple), mais on se retrouvait alors avec une multitude d'encodages que les systèmes numériques devaient pouvoir traiter. Pour éviter cet inconvénient, il a été décidé dans les années 90, de définir un encodage plus universel permettant de contenir les caractères de toutes les langues tout en étant compatible avec l'*ASCII* : l'*unicode* (dont la variante la plus connue et utilisée, notamment sur le web, est l'*UTF-8* et qui a vocation à devenir le standard).

4. Représentation matricielle

1) Généralités

Les matrices

- Une matrice est un tableau de nombres.
Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
- Si la matrice comporte n lignes et p colonnes, on dit que la matrice est de dimension
- Les nombres du tableau sont appelés de la matrice.

► Remarques :

- Une matrice ne comportant qu'une seule ligne est appelée
- Une matrice ne comportant qu'une seule colonne est appelée
- Une matrice comportant autant de lignes que de colonnes est appelée

2) Somme, différence et multiplication par un nombre

- Pour ajouter deux matrices de même dimension, il suffit d'ajouter les coefficients. Exemples :

$$\cdot \text{ si } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ alors } A + B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\cdot \text{ si } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ alors } A + B = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- Pour soustraire deux matrices de même dimension, il suffit de soustraire les coefficients. Exemples :

$$\cdot \text{ si } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ alors } A - B = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\cdot \text{ si } A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -5 \\ 8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \text{ alors } A - B = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

- Pour multiplier une matrice par un nombre, il suffit de multiplier les coefficients de la matrice par ce nombre. Exemple :

$$\cdot \text{ si } A = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ -5 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ alors } 3A = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3) Multiplication de deux matrices

Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Multiplier une matrice ligne par une matrice colonne ayant le même nombre de coefficients donne un nombre que l'on obtient en appliquant le principe suivant (appelé « mouvement tournant ») :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by \quad ; \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$$

► Exemples :

$$\cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$$

► **Remarque :** la multiplication de deux matrices n'est possible que si les dimensions des matrices permettent le « mouvement tournant ».

Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

On multiplie chaque ligne de la première matrice par la matrice colonne comme au paragraphe précédent et on place les résultats les uns sous les autres (dans une matrice colonne).

Étape 1 :	Étape 2 :
$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

► Exemples :

- $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 8 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Cas général

Le produit d'une matrice A par une matrice B lorsqu'elle est possible est la matrice notée AB obtenue en multipliant A par chaque colonne de B .

Étape 1 :	Étape 2 :
$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
Étape 3 :	Étape 4 :
$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

► Exemples :

- $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & 8 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

► **Remarque :** lorsque les dimensions le permettent, les opérations sur les matrices respectent les règles standards de distributivité sauf qu'en général, $AB \neq BA$.

Puissance d'une matrice carrée

Si A est une matrice carrée, le produit AA est noté A^2 , le produit AAA est noté A^3 , etc...

► Exemple :

- Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$
- et $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$

► Exercice n°11

Compléter la matrice manquante dans les cas suivants :

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
- c) $3 \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 7 & -5 & -2 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
- e) $2 \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

► Exercice n°12

a) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ alors $AB =$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $AB =$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ alors $AB =$

► Exercice n°13

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $AB = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$

Et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$

► Exercice n°14

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$

Et $AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$

► Exercice n°15

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

Et $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

► Exercice n°16

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. « On peut calculer $A + B$ ».
2. « On peut calculer $A + C$ ».
3. « On peut calculer AB ».
4. « On peut calculer BC ».
5. « On a $AB = BA$ ».
6. « On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ».
7. « On a $A^2 = \begin{pmatrix} 23 & 56 \\ 16 & 39 \end{pmatrix}$ ».

5. Représentation numérique des images

Pour décrire de façon numérique une image, il existe deux méthodes :

- la représentation dite *vectorielle* où l'on cherche à décrire l'image par les propriétés mathématiques des objets géométriques qu'elle contient (droites, cercles...). L'avantage de cette méthode est de pouvoir agrandir ou réduire autant que l'on veut l'image sans dégrader sa qualité (l'image étant reconstituée à chaque fois d'après les propriétés des objets géométriques), mais cette méthode ne convient que pour les images que l'on peut décrire uniquement à partir de figures géométriques (icônes, images d'illustration...) et est complètement inadaptée aux images photographiques par exemple.

Un des formats d'image vectorielle le plus courant est le *svg* (« scalable vector graphic »).

- la représentation dite *matricielle* (ou *bitmap*) obtenue en quadrillant l'image par une grille et en décrivant chaque case, appelée *pixel*, de cette grille. La méthode de description de chaque pixel dépend du type de l'image : en noir et blanc, en nuances de gris ou en couleur.

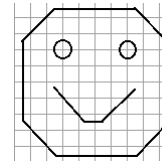
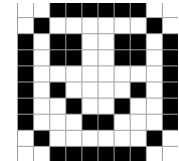


Image matricielle en noir et blanc : on noircit chaque pixel (case du quadrillage) contenant une portion de trait

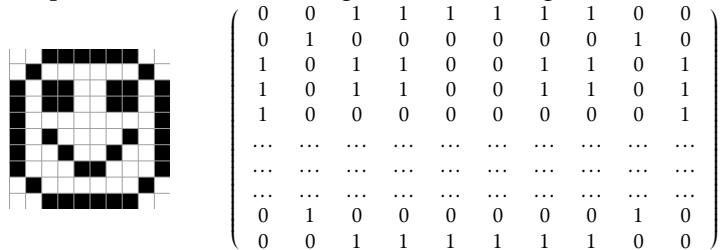


1) Exemple de codage d'une image en noir et blanc

► **Principe :** Une fois que chaque pixel s'est vu attribué la couleur blanche ou noire, on associe à la grille une matrice de même dimension en attribuant le coefficient 1 à un pixel noir et le coefficient 0 à un pixel blanc. Ainsi, un bit suffit pour coder un pixel.

► Exercice n°17

a) Compléter la matrice de codage associé à l'image ci-dessous :



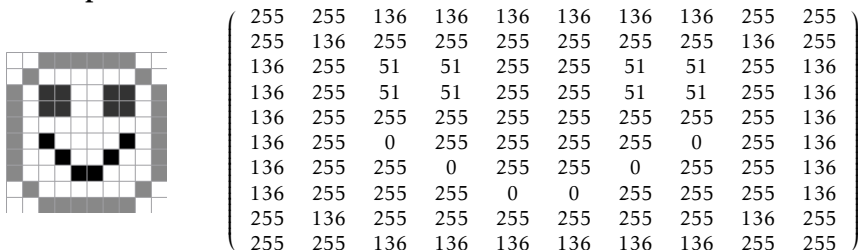
b) Combien de bits sont nécessaires au codage de la matrice de l'image?

► **Remarque :** Ce type de codage est utilisé par le format d'image *pbm*.

2) Exemple de codage d'une image en niveaux de gris

► **Principe :** En plus du noir et du blanc, on peut utiliser (notamment pour les photos en noir et blanc) diverses nuances de gris. A chaque pixel, on associe cette fois dans la matrice un coefficient compris entre 0 et 255 : 0 pour le noir, 255 pour le blanc et les valeurs intermédiaires pour des gris plus ou moins clairs. Ainsi un octet suffit pour coder un pixel.

► **Exemple :**



► Exercice n°18

Combien de bits sont nécessaires au codage de la matrice de l'image de l'exemple ci-dessus?

► Exercice n°19

Le codage de la matrice d'une image en niveau de gris nécessite 64 kio.

a) De combien de pixels est composée l'image?

.....

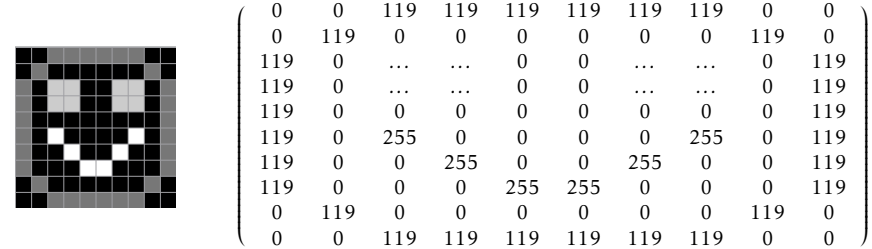
b) Sachant que cette image est carrée, quelle est sa largeur en pixels?

.....

► **Remarque :** Ce type de codage est utilisé par le format d'image *pgm*.

► Exercice n°20

Ci-dessous figure le négatif de l'image de l'exemple précédent et une partie de la matrice associée :



a) Par quelle méthode passe-t-on de la matrice de l'image à celle de son négatif?

.....

b) Compléter la matrice associée au négatif.

3) Exemple de codage d'une image en couleur

► **Principe :** En mélangeant des teintes rouges, vertes et bleues on peut donner à l'œil humain la sensation de recevoir une lumière de n'importe quelle couleur.

Une des méthodes pour coder une image en couleur est le système *RVB* qui va associer à chaque pixel une intensité en rouge, en vert et en bleu; ce qui revient à attribuer à chaque image trois matrices : une pour la couleur rouge, une pour la couleur verte et une pour la couleur bleue.

Si l'intensité de chaque couleur est représentée par un coefficient compris entre 0 et 255 (c'est à dire par un octet qui équivaut à 8 bits), on dit que l'on a à faire avec une image « 24 bits » ou image en « couleurs vraies ».

► **Remarques :**

- Ce type de codage est utilisé par le format d'image *ppm*.
- En photographie numérique, les intensités rouges, vertes et bleues sont obtenues par des capteurs, appelés *photosites*, couplés avec un filtre dit de *Bayer*.

► Exercice n°21

- a) Quel est le nombre de couleurs différentes que peut utiliser une image « 24 bits » ?
.....
- b) Combien de Mio sont nécessaires pour coder les intensités de couleur d'une image « 24 bits » carrée d'une largeur de 1024 pixels ?
.....

Conversion d'une image couleur en niveaux de gris

Une des méthodes possibles est de calculer l'intensité de gris de chaque pixel en faisant la moyenne des intensités rouges, vertes et bleues, ce qui revient à effectuer le calcul matriciel : $G = \frac{1}{3}(R + V + B)$ (où R , V et B représentent les matrices des intensités en couleur rouge, verte et bleue et G représente la matrice des nuances de gris).

► Exercice n°22

Retrouver les valeurs de A , B , C , D et E dans les matrices ci-dessous, pour que cela corresponde à la conversion d'une image couleur carrée de 3 pixels en niveau de gris.

$$R = \begin{pmatrix} 128 & 32 & 3 \\ 0 & 64 & 200 \\ \boxed{D} & 85 & 56 \end{pmatrix}; V = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 42 \\ 180 & 11 & 81 \\ 24 & 65 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 70 & 7 & \boxed{E} \\ 21 & 0 & 55 \\ 40 & 54 & 136 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{A} & 13 & 59 \\ 67 & \boxed{B} & 112 \\ 91 & \boxed{C} & 64 \end{pmatrix}$$

4) Définition, résolution, profondeur d'une image

Vocabulaire sur les images numériques

- La *définition* d'une image décrit le nombre de pixels qui la composent et s'écrit de la façon suivante : $(\text{nombre de pixels en largeur}) \times (\text{nombre de pixels en hauteur})$

- La *résolution* d'une image décrit le nombre de pixels par unité de longueur et permet de mesurer son degré de détail. Elle s'exprime en *dpi* pour « dots per inch » car l'unité de longueur utilisée dans les systèmes numériques est le *pouce* anglo-saxon qui vaut 2,54 cm.
- La *profondeur de couleur* d'une image est définie par le nombre de bits utilisés pour représenter chaque pixel.

► Exercice n°23

- a) Quelle est la résolution d'une photographie numérisée de définition 2100×2100 imprimée sur une feuille carrée de côté 17,78 cm ?
.....
- b) Quelle est la taille en pixels d'une photographie numérisée à la résolution de 400 dpi et imprimée sur une feuille carrée de côté 21,59 cm ?
.....
- c) Retrouver la largeur et la hauteur en cm d'un écran d'un téléphone portable sachant que la notice indique que cet écran a une résolution de 523 dpi pour une définition de 1440 x 2960 pixels.
Quelle est la longueur en pouces de la diagonale de cet écran ?
.....
- d) À quelle résolution maximale peut-on prendre en photo dans un musée un tableau de 5 mètres par 5 mètres avec un appareil numérique possédant un capteur de 16 millions de pixels ?
.....
.....
- e) Quelle est la profondeur de couleur d'une image noire et blanc ?
.....
- f) Quelle est la profondeur de couleur d'une image en 256 nuances de gris ?
.....

► Remarque :

La valeur standard de la résolution d'un écran d'ordinateur est de 72 dpi et on estime que pour scanner ou imprimer un document graphique avec une qualité standard, il faut une résolution de 300 dpi.

5) Compression

Les méthodes de codage d'images vues précédemment impliquent de donner une information chiffrée pour chaque pixel, ce qui génère des fichiers d'images dont la taille en octets devient vite importante. Des méthodes de *compression* permettent de réduire cette taille en permettant aux fichiers de prendre moins de place sur un périphérique de stockage et de faciliter son transfert sur Internet. On distingue deux types de compression :

- la compression *sans perte* qui permet de retrouver l'intégralité des données d'origine;
- la compression *avec perte* qui réduit la taille du fichier en supprimant des informations non indispensables (par exemple des nuances que l'oeil humain peut à peine remarquer).

Une des méthodes les plus simples de compression sans perte pour des images en noir et blanc est le système de codage *RLE* (« Run Length Encoding ») qui consiste à compter le nombre de pixels blancs et noirs qui se suivent plutôt que d'attribuer un 0 ou un 1 à chaque pixel.

► Exemple avec l'image ci-dessous :

						2,1,2
						1,3,1
						0,1,3,1
						
						

- La 1^{re} ligne contient 2 pixels blancs, 1 pixel noir et 2 pixels blancs. Elle est donc représentée en système RLE par la suite « 2,1,2 » plutôt que par « 0,0,1,1,00 » (il y a donc réduction du nombre d'informations chiffrées nécessaires);
- La 2^e ligne contient 1 pixels blanc, 3 pixels noirs et 1 pixel blanc. Elle est donc représentée en système RLE par la suite « 1,3,1 »;
- La 3^e ligne commence par 1 pixel noir suivi de 3 pixels blancs et d'un pixel blanc. Mais comme il faut toujours commencer le codage par le nombre de pixels blancs, cette ligne est représentée en système RLE par la suite « 0,1,3,1 ».

► Exercice n°24

Donner le code RLE des deux dernières lignes de l'image de l'exemple.

► Exercice n°25

1. Reconstituer l'image en noir et blanc ci-dessous d'après le code RLE de chaque ligne qui est indiqué :

						2,4
						1,4,1
						0,3,3
						4,1,1
						0,1,3,2
						0,6

2. Combien de nombres sont nécessaires pour coder l'image avec le système RLE?
.....

6) Formats, métadonnées

Les formats d'image pbm, pgm et ppm vus auparavant sont parmi les plus simples et plus faciles à lire, mais ne sont pas optimisés en taille de fichier généré et ne sont pas les plus courants.

D'autres formats d'images matricielles sont disponibles et sont beaucoup plus utilisés : ils se distinguent par la manière dont les données sont rangées et sont compressées (la compression pouvant se faire avec ou sans perte d'information).

Formats d'images usuels :

format	compression	profondeur de couleurs	utilité
RAW	oui sans perte	24 bits	photo
JPEG			photo
GIF			web
PNG			web
TIFF			numérisation
AVIF			web

Par ailleurs, pour les photographies numériques, l'appareil enregistre en plus des informations matricielles sur les pixels, d'autres données supplémentaires appelées *métadonnées* qui peuvent contenir

.....

Ces métadonnées peuvent être consultées (et modifiées) via les propriétés de l'image fournies par le système et/ou les logiciels graphiques. Le format le plus utilisé pour ces métadonnées est l'*EXIF*

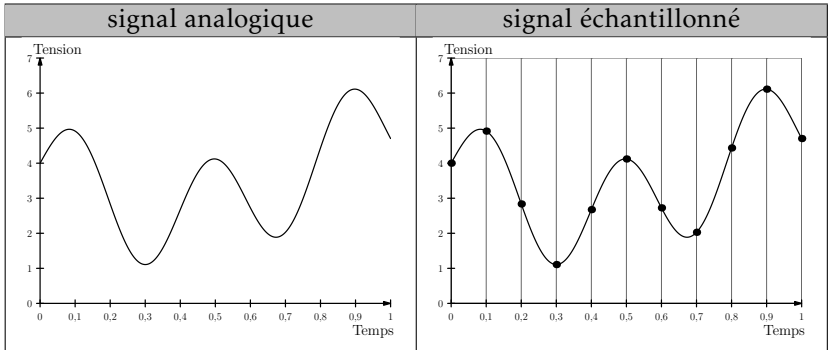
6. De l'analogique vers le numérique - systèmes embarqués

1) Généralités

De nombreux systèmes informatiques ne comportent ni clavier, ni écran : on parle alors de *systèmes embarqués*. Ces unités informatiques reçoivent en entrée des données fournies par des capteurs qui mesurent des grandeurs physiques (intensité lumineuse, intensité sonore, etc.) converties en général sous la forme d'une tension électrique qui varie de façon continue en fonction du temps : c'est ce qu'on appelle un

Or pour que ces données puissent être traitées par un processeur informatique, elles doivent être, c'est à dire converties en une liste finie de nombres exprimés en binaire.

Une des méthodes pour faire cela consiste à ne lire la valeur du signal continu qu'à certains instants : c'est ce qu'on appelle un signal.



2) Exemple : numérisation d'un son

Un son est une variation de la pression de l'air au cours du temps que l'on peut capter et convertir en signal électrique continu. Pour numériser un tel signal, une carte son du type « 44 kHz - 16 bits » va mesurer et quantifier la valeur du signal, avec un nombre sur 16 bits, 44 000 fois par seconde.

► Exercice n°26

Une carte son « 44 kHz - 16 bits » enregistre un son pendant 10 minutes. Quelle serait la taille, en Mio, du fichier généré s'il n'était pas compressé?

.....

► Remarque : les formats de fichiers musicaux contiennent souvent aussi, comme les formats de fichiers pour les images, des métadonnées qui indiquent les auteurs, le titre du morceau, l'album, etc...

7. La représentation de textes enrichis

Les textes en ASCII ou en unicode sont des textes bruts sans aucune mise en forme, ni structure. Ils servent notamment aux programmeurs qui les écrivent et les modifient avec des

En dehors la programmation, des textes structurés avec une mise en forme dotée de titres, de paragraphes, d'extraits en gras ou en italiques, etc. sont souvent nécessaires. Ces textes enrichis peuvent être mis au point en bureautique avec des mais sont aussi présents dans les pages web.

1) Exemple avec le langage du web : le HTML

Le langage qui permet créer les pages web s'appelle le *HTML* (pour « HyperText Markup Language ») et est basé sur l'utilisation de *balises* : le principe consiste à encadrer le texte entre deux balises : `<balise>...</balise>` (une balise « ouvrante » et une balise « fermante » avec un /). Quand une page web est chargée par le navigateur, celui-ci interprète le code html de la page et affiche alors la page avec tous les enrichissements de forme indiqués par les balises.

Quelques balises de base

<code>...</code>	mettre en gras
<code><i>...</i></code>	mettre en italique
<code><h1>...</h1></code>	titre principal
<code><h2>...</h2></code>	sous-titre
<code><p>...</p></code>	un paragraphe

Des balises spéciales

- Lien hypertexte (quand on clique, le navigateur affiche la page web dont l'adresse est spécifiée) :
`<a href="http://lycee-palissy-agen.fr">lycée Palissy</a>`

- Une exception au principe des balises ouvrantes et fermantes est le code pour insérer une image . Il n’y a qu’une seule balise où l’on doit indiquer quelle est l’image à faire apparaître avec le paramètre src :
``

Structure minimale d’une page html

Code html	Explication
<pre> <html> <head> <meta charset="utf-8"> <title>Titre de la page</title> </head> <body> </body> </html> </pre>	• Entre les balises <head></head> se trouve l’en-tête de la page qui n’est pas affiché mais qui sert à paramétrer l’affichage par le navigateur. • <meta charset="utf-8"> sert à indiquer l’encodage utilisé pour éditer le code html (indispensable) • Entre les balises <title></title>, se trouve le titre de la page qui sera indiqué par le navigateur. • C’est entre les balises <body></body> que l’on indique tout le texte enrichi par les balises de base qui sera affiché par le navigateur.

Exemple minimaliste de rendu d’un code html par un navigateur



► Exercice n°27

Le code html suivant contient une erreur :

il y a une erreur quelque <i>part<i>.

Proposer un rectificatif :

► Exercice n°28

Donner le code html pour que le texte Sciences numériques soit affiché par le navigateur avec Sciences en gras et numériques en italique :

.....

► Exercice n°29

Vers quel site pointe le lien dans le code html suivant :

Cliquer ici pour mettre à jour vos coordonnées bancaires

Réponse :

► Exercice n°30

Quel est le nom du fichier de l’image que va afficher le code html suivant :

Une photo de vacances :

Réponse :

► **Remarque** : Il est possible de changer le style (police, couleur, etc.) de chaque élément d’une page web via une *feuille de style* au format *css* (« Cascading Style Sheet »). Via un fichier css, on peut modifier de façon cohérente le style de l’ensemble de toutes les pages d’un site avec une gestion séparée du contenu (les pages html) et de la présentation (le fichier css).

Si l’on veut, par exemple, que tous les titres d’un site web soient affichés en rouge, il suffira d’indiquer le code suivant dans la feuille de style css du site web :

```

h1 {
  color: red;
}

```

À propos du web

Internet est un vaste ensemble de réseaux mondiaux interconnectés qui ne permet pas seulement d’avoir accès aux sites web. Il permet aussi l’échange de fichiers, de mails, la transmission de conversations téléphonique, la diffusion de vidéos, de musique etc...

Le web n’est donc qu’un service parmi d’autres que permet d’utiliser internet.

Quelques spécificités du web

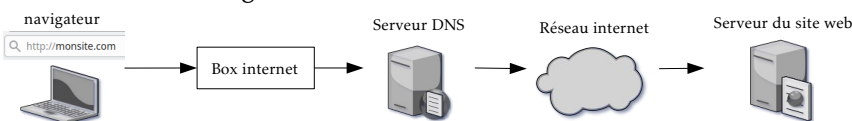
- Les accès à un site web se font à l'aide des protocoles *http* (« hypertext transfert protocol ») et *https* (une version sécurisée où les communications sont chiffrées).
- Un site web est hébergé sur un serveur et est identifié par une adresse IP et peut-être atteint par un navigateur en tapant comme adresse : *http://xxx.xxx.xxx.xxx* où *xxx.xxx.xxx.xxx* serait l'adresse IP du site web.

Mais comme ce n'est ni facile à utiliser ou à retenir comme adresse, le propriétaire d'un site web peut associer un nom à son site en achetant un *nom de domaine*. Dans ce cas là, l'adresse du site devient par exemple : *http://monsite.com*

L'adresse du site est alors, ce qu'on appelle une *url* (« Uniform Ressource Locator » qui précise le protocole utilisé (*http*) et où se trouve le site à joindre.

Pour faire la correspondance entre le nom de domaine et l'adresse IP, qui elle seule permet de joindre le site, des serveurs spéciaux appelés *DNS* (« Domain Name System ») sont appelés par le fournisseur d'accès à internet dès que l'on entre une adresse dans un navigateur. Ces serveurs *DNS* sont des immenses annuaires qui permettent de dire que tel nom de domaine correspond à telle adresse IP sur tel serveur.

- Schéma résumant (de façon simplifiée) ce qui se passe en tapant une adresse dans un navigateur :



8. Le problème des données personnelles

Les réseaux sociaux, les objets connectés (télévisions, voitures, ...) et l'internet des objets (téléphones, tablettes numériques ...) posent des problèmes nouveaux concernant la captation et l'exploitation de données insignifiantes en elles-mêmes mais "« susceptibles de contribuer à un profilage très fin des individus et de produire à leur propos un «savoir» (probabilistique plutôt que de certitude) de leurs propensions personnelles et intimes, de leurs croyances religieuses, de leurs opinions politiques, de leur orientation sexuelle, de leur mode de vie et de bien d'autres aspects de leur vie personnelle et intime »" (Commission Nationale Informatique et Libertés).

C'est pour cela qu'au niveau de l'Union Européenne un règlement a été mis en place auquel doit se soumettre toute organisation publique et privée qui traite des données

personnelles (c'est à dire toute information se rapportant à une personne physique identifiée ou identifiable).

Les principales notions de ce règlement (appelé) sont :

- La : une organisation traitant des données personnelles ne doit collecter que celles qui sont au fonctionnement du service qu'elle propose.
- Le : un utilisateur doit donner son consentement pour qu'une organisation collecte une donnée personnelle le concernant.
- La : un utilisateur doit être informé de tous les aspects concernant le traitement de ses données personnelles.

► Exercice n°31

Donner des exemples de données personnelles :

.....

— Info sur les « cookies » —

Un cookie est un fichier texte généré par le serveur du site web que l'on visite ou par le serveur d'une application tierce (régie publicitaire, logiciel d'analyse du trafic internet, etc.) et qui est déposé par le navigateur sur l'appareil utilisé (ordinateur, téléphone, etc.).

Les cookies peuvent avoir un rôle technique indispensable en permettant de reconnaître et retrouver les préférences d'un internaute lorsqu'il revient sur un site web, mais ils peuvent aussi servir à « pister » les goûts et les comportements d'un internaute afin de lui proposer ensuite des publicités ciblées. Ainsi, par exemple, lorsqu'on navigue sur plusieurs sites vendant des chaussures, on risque d'être confronté à des publicités sur le thème des chaussures par la suite en raison des données enregistrées dans certains cookies de pistage.

COURS : Les graphes au service des systèmes numériques

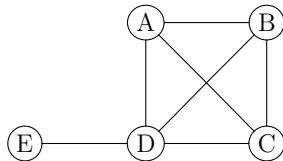
De nombreuses situations dans le monde numérique peuvent être schématisées à l'aide de graphes.

1. Les graphes non orientés

1) Généralités

Un graphe non orienté est un schéma composé de *sommets* dont certains sont reliés par des *arêtes*.

► **Exemple :** Dans le graphe ci-dessous, les sommets A, B, C, D et E représentent des membres d'un réseau social et la présence d'une arête entre deux sommets signifie que les deux membres sont amis sur ce réseau social.



Vocabulaire

- Le nombre total de sommets est appelé *ordre* du graphe.
Avec l'exemple : l'ordre du graphe est égal à
- Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils sont reliés par une arête.
Dans le contexte de l'exemple, dire que deux sommets sont *adjacents* revient à dire que
Citer dans l'exemple, deux sommets qui ne sont pas *adjacents* :

- On appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arêtes dont le sommet est une extrémité.

Dans le contexte de l'exemple, que signifie le degré d'un sommet ?

Avec l'exemple, compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré					

Quelle est la somme des degrés du graphe ?

Quel est le nombre d'arêtes du graphe ?

Propriété

La somme des degrés d'un graphe est égal à deux fois le nombre d'arêtes. Cette somme ne peut donc être qu'un entier pair.

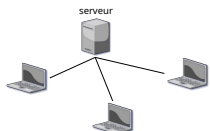
Vocabulaire

Un graphe est dit *complet* si chaque sommet est relié à tous les autres par une arête.

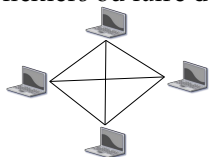
Le graphe de l'exemple est-il complet ?

Architectures classiques d'échanges sur un réseau

- Le cas le plus courant : le modèle *client/serveur* :
Le *client* (ordinateur, téléphone, etc...) demande une ressource à un *serveur* (où sont, par exemple, stockés des sites web) qui lui répond en envoyant les données demandées.



- Le modèle *pair-à-pair* (« P2P : peer to peer » en anglais) :
Chaque participant est à la fois client et serveur : chacun met ses ressources matérielles et logicielles au service de tous. Cela peut servir à échanger des fichiers ou faire du calcul distribué.



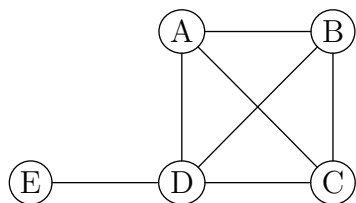
► Exercice n°32

Parmi les deux modèles d'échanges décrits ci-dessus, lequel peut être représenté par un graphe complet?

Vocabulaire

La *matrice d'adjacence* d'un graphe est une matrice carrée de même ordre que celui du graphe où un coefficient 1 indique l'existence d'une arête entre le sommet de la ligne et celui de la colonne (le coefficient est nul dans le cas contraire).

Compléter la matrice d'adjacence du graphe de l'exemple ci-dessous :

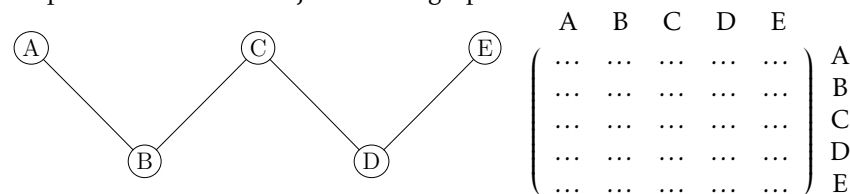


	A	B	C	D	E	
A	0	1	1	1	0	A
B	...	...	...	...	...	B
C	...	...	...	...	...	C
D	...	...	...	...	...	D
E	...	...	...	...	...	E

Que retrouve-t-on en effectuant la somme des coefficients de chaque ligne?
.....

► Exercice n°33

a) Compléter la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous :



	A	B	C	D	E	
A	...	...	...	...	...	A
B	...	...	...	...	...	B
C	...	...	...	...	...	C
D	...	...	...	...	...	D
E	...	...	...	...	...	E

b) Donner l'ordre du graphe :

c) Compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	...	...	...	...	...

► Exercice n°34

Compléter le graphe ci-dessous pour qu'il corresponde à la matrice d'adjacence donnée.

	A	B	C	D	
(A)	0	1	0	1	A
(B)	1	0	1	1	B
(C)	0	1	0	0	C
(D)	1	1	0	0	D

► Exercice n°35

Un graphe possède quatre sommets A, B, C et D et comporte 11 arêtes.

A est de degré 3, B est de degré 4 et C est de degré 5.

Quel est le degré du sommet D?
.....

► Exercice n°36

Un graphe complet est d'ordre 10.

- Quel est le degré de chacun des sommets?
- Combien d'arêtes le graphe comporte-t-il?

► Exercice n°37

Peut-il exister un graphe d'ordre 6 dont les degrés des sommets sont donnés ci-dessous?

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	4	5	3	4	3

► Exercice n°38

Un tournoi d'e-sport réunit 6 joueurs numérotés de 1 à 6 qui doivent s'affronter en duel. Chaque joueur rencontre une fois et une seule les cinq autres.

1. Compléter le graphe ci-dessous dans lequel les sommets représentent les joueurs de façon à ce que les arêtes représentent une rencontre.

② ③

① ④

⑥ ⑤

2. Quel est le degré de chacun des sommets?

Quel est le nombre total d'arêtes?

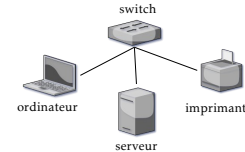
Le graphe est-il complet?

3. Sachant que trois assauts peuvent se dérouler en même temps, déterminer un calendrier possible du tournoi. (on pourra s'aider en marquant au fur et à mesure les arêtes correspondantes à une série de trois duels)

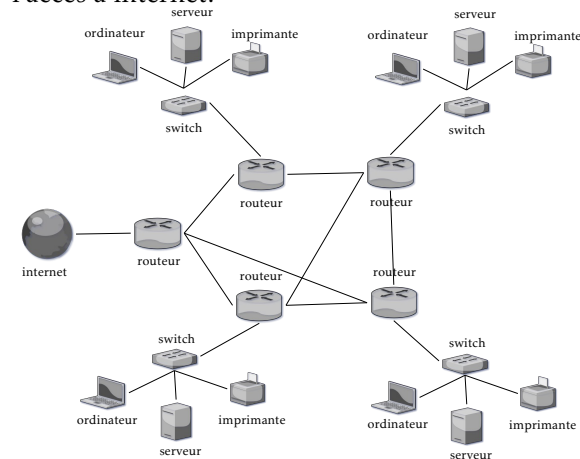
.....

Info sur les réseaux informatiques

- Pour faire communiquer entre eux localement des ordinateurs, des imprimantes, des serveurs, etc. on se sert d'un *switch* qui utilise directement l'identifiant de chaque carte réseau (*l'adresse mac*) pour transmettre les données (sans passer par les adresses IP).



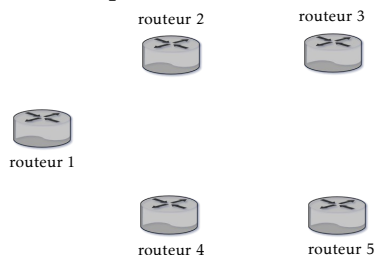
- Alors qu'un *switch* connecte plusieurs périphériques pour créer un réseau local, un *routeur* connecte plusieurs *switchs* et leurs réseaux respectifs pour former un plus grand réseau et sert alors de répartiteur : il dirige le trafic en utilisant les protocoles TCP et IP et choisit l'itinéraire le plus efficace (avec ce qu'on appelle une *table de routage*) pour que les informations, sous forme de paquets de données, arrivent à la bonne destination. Outre la connexion de plusieurs réseaux entre eux, le routeur permet aussi l'accès à internet.



- Les box des fournisseurs d'accès à internet sont à la fois un switch et un routeur avec un modem pour la connexion internet.

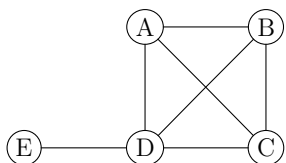
► Exercice n°39

On dispose de 5 routeurs. Est-il possible de relier chacun d'entre eux à trois autres routeurs parmi les 5 ?



2) Chaines

Pour illustrer les définitions, on reprend notre exemple des 5 membres d'un réseau social :

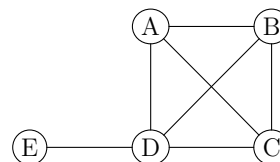


Vocabulaire

- Dans un graphe, une *chaîne* est une liste ordonnée d'arêtes permettant de décrire un chemin reliant deux sommets et on appelle *longueur* de la chaîne le nombre d'arêtes qui la composent.
Dans l'exemple, E-D-B-C-A-D est une chaîne de longueur
- La *distance* entre deux sommets est le plus petit nombre d'arêtes qu'il faut emprunter pour les joindre.
Avec l'exemple : la distance entre E et B est égale à
Que cela signifie-t-il dans le contexte de l'exemple :
.....
.....

- L'*excentricité* d'un sommet est la plus grande distance entre ce sommet et les autres sommets.

Avec l'exemple (rappelé ci-dessous), compléter le tableau ci-dessous pour qu'il indique la distance entre deux sommets et l'excentricité de chaque sommet



Distance	A	B	C	D	E	excentricité
A	0					
B		0				
C			0			
D				0		
E					0	

- Le *diamètre* d'un graphe est la plus grande distance entre deux de ses sommets.
Pour l'exemple, le diamètre est égal à
- Le *rayon* d'un graphe est la plus petite excentricité de ses sommets.
Pour l'exemple, le rayon est égal à
- On appelle *centre* d'un graphe tout sommet dont l'excentricité est égale au rayon.
Pour l'exemple, le(s) centre(s) du graphe est(ont)
Que cela signifie-t-il dans le contexte de l'exemple :
.....
.....

► Exercice n°40

Avec l'exemple,

- De combien de façons peut-on passer de D à A, B et C avec une chaîne de longueur 2 ?
- De combien de façons peut-on passer de D à D avec une chaîne de longueur 2 ?
- De combien de façons peut-on passer de D à E avec une chaîne de longueur 2 ?

d) Le carré de la matrice d'adjacence du graphe donne :

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} \end{matrix}$$

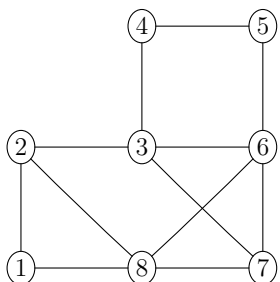
Que retrouve-t-on à la ligne de D ?

Propriété

Si M est la matrice d'adjacence d'un graphe simple, alors les coefficients de M^n donne le nombre de chaines de longueur n entre le sommet de la ligne et le sommet de la colonne.

► Exercice n°41

Huit routeurs sont reliés selon le graphe ci-dessous :



a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ?

En déduire le nombre minimum de routeurs par lequel doit passer un paquet envoyé du routeur 1 pour arriver au routeur 5 :

b) On note M la matrice associée à ce graphe et on admet que la cinquième ligne de M^3 donne : (1,3,1,4,0,6,3,1). En déduire le nombre de chaines de longueur 3 entre les sommets 5 et 6 :

Parmi ces chaines, lesquelles permettent-elles d'envoyer un paquet de données du routeur 5 au routeur 6 en passant par deux autres routeurs ?

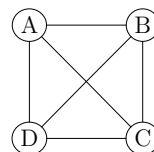
c) On souhaite que deux routeurs reliés par une simple arête puisse être identifié sur un plan du réseau par une couleur différente. Justifier qu'il faudra au moins trois couleurs différentes.

3) Sous-graphe complet

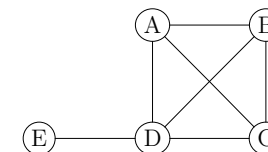
Propriété

Un sous-graphe complet d'un graphe est un extrait du graphe (sommets et arêtes les joignant) dont chaque sommet est relié par une arête à tous les autres.

► Exemple :



est un sous-graphe complet de

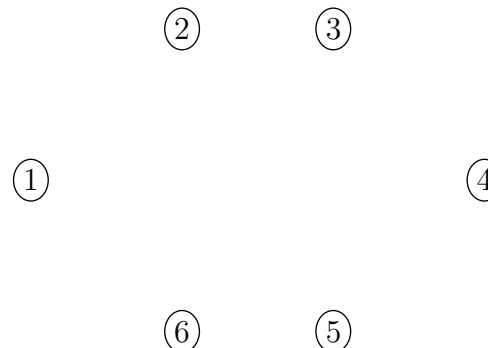


► Exercice n°42

Un élève souhaiterait inviter à une soirée six de ses camarades de classe (numérotés de 1 à 6), mais uniquement ceux qui sont amis entre eux sur un réseau social afin d'éviter une mauvaise ambiance. Le tableau ci-dessous indique ceux qui ne sont **pas amis** entre eux :

camarade de classe	1	2	3	4	5	6
n'est pas ami avec	2	1,5,6	5	5	2,3,4,6	2,5

a) Représenter cette situation dans le graphe ci-dessous en reliant par une arête les camarades de classe qui **sont amis** entre eux.



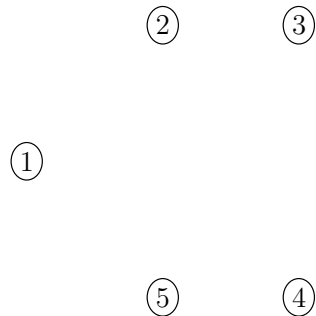
b) Combien de camarades au maximum l'élève peut-il inviter sans risque de mauvaise ambiance ?

► Exercice n°43

Une entreprise dispose de 5 gros serveurs numérotés de 1 à 5 qui nécessitent une bonne climatisation. Pour éviter des problèmes de consommation électrique, ils ne peuvent être utilisés ensemble qu'avec les contraintes suivantes :

- Le serveur 1 peut être utilisé en même temps que le serveur 5 ;
- Le serveur 2 peut être utilisé en même temps que les serveurs 3, 4 et 5 ;
- Le serveur 3 peut être utilisé en même temps que le serveur 5 ;
- Les autres combinaisons ne sont pas possibles.

a) Représenter cette situation par le graphe ci-dessous dans lequel on relie les serveurs pouvant être utilisés ensemble par une arête.



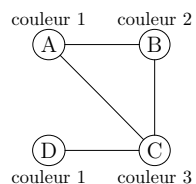
b) Quel est le nombre maximal de serveurs pouvant être utilisés ensemble? Citer ces serveurs.

.....

4) Coloration d'un graphe

Vocabulaire

- La *coloration* d'un graphe consiste à affecter une « couleur » à chacun des sommets de sorte que deux sommets reliés par une arête ne portent pas la même couleur. C'est un moyen de différencier les sommets d'un graphe de façon à ce que deux sommets adjacents ne soient pas dans la même catégorie. *Exemple :*



- Le plus petit nombre de couleurs permettant la coloration d'un graphe est appelé *nombre chromatique*

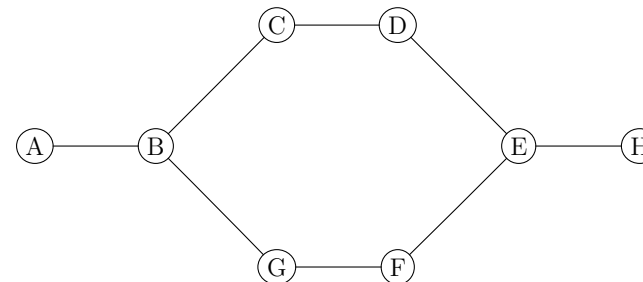
Propriété

- Si le graphe est complet le nombre chromatique est égal
- Si le graphe n'est pas complet alors le nombre chromatique est supérieur ou égal au nombre de sommets nécessaire pour former le sous-graphe complet d'ordre maximal.

Un algorithme de coloration

- On classe dans un tableau les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés ;
- On attribue une nouvelle couleur (par un numéro par exemple) au premier sommet non encore coloré du tableau et la même couleur à chaque sommet non adjacent à un sommet de cette couleur (dans l'ordre du tableau) ;
- On réitère l'étape précédente jusqu'à ce que tous les sommets se sont vu attribués une couleur.

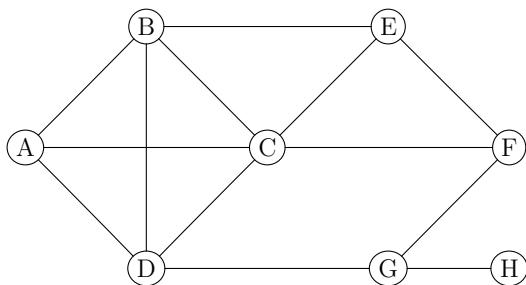
► Exemple :



Sommet	B	E						
Degré	3	3						
Couleur								

► Exercice n°44

Dans le graphe suivant, les sommets représentent 8 émetteurs de télécommunication pour la 4G et une arête entre deux sommets signifie que l'on ne peut pas allouer la même fréquence aux deux émetteurs correspondants pour éviter des interférences entre eux à cause de leur proximité. On cherche à minimiser le nombre de fréquences à utiliser.



- a) Justifier qu'il faudra au moins 4 fréquences différentes.

 b) Proposer une coloration du graphe en s'aidant du tableau suivant
- | | | | | | | | | |
|---------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| Sommet | | | | | | | | |
| Degré | | | | | | | | |
| Couleur | | | | | | | | |
- c) Indiquer alors une répartition des émetteurs pouvant utiliser la même fréquence :

Info sur le « Big Data »

On désigne par le terme « Big Data » les énormes quantités de données numériques générées par l'immensité des individus et objets connectés et les nouveaux moyens qu'il a fallu créer pour y accéder et les analyser. Le « Big Data » peut notamment être utilisé pour développer des technologies d'*intelligence artificielle* (IA) qui nécessitent de gros moyens informatiques.

► Exercice n°45

Dans un laboratoire d'intelligence artificielle comportant 5 machines numérotées de 1 à 5, un analyste doit effectuer cinq tâches notées A,B,C,D et E :

- la tâche A nécessite l'utilisation des machines 1, 3 et 5 ;
- la tâche B nécessite l'utilisation des machines 1 et 2 ;
- la tâche C nécessite l'utilisation des machines 2, 3 et 5 ;
- la tâche D nécessite l'utilisation des machines 2 et 4 ;
- la tâche E ne nécessite que l'utilisation de la machine 5.

Chaque tâche requiert le même temps d'exécution d'une heure et une même machine ne peut être utilisée que pour une seule tâche à la fois.

1. Représenter la situation par le graphe ci-dessous ayant pour sommets les cinq tâches et en reliant les tâches ne pouvant pas être exécutées en même temps.

Ⓐ

Ⓔ

Ⓑ

Ⓓ

Ⓒ

2. Justifier qu'il faudra au moins 3 couleurs différentes pour colorer ce graphe.

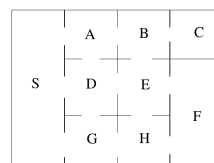
3. Proposer une coloration du graphe en s'aidant du tableau suivant

Sommet					
Degré					
Couleur					

4. En déduire une organisation du travail qui permet de minimiser le temps total nécessaire à l'exécution des cinq tâches.

► Exercice n°46

Dans la figure ci-dessous, les lettres S, A, B ... représentent les salles d'un data center et une ouverture représente une porte de communication entre deux salles.



1. Compléter le graphe ci-dessous en traçant une arête pour chaque porte de communication entre deux salles

Ⓐ

Ⓑ

Ⓒ

Ⓔ

Ⓓ

Ⓔ

Ⓕ

Ⓖ

Ⓖ

- a) Ce graphe est-il complet?
- b) Quel est l'ordre maximal des sous-graphes complets du graphe?
- c) Quel est le diamètre du graphe?

2. On note M la matrice associée au graphe (avec l'ordre des sommets suivant : S, A, B, C, D, E, F, G et H).

On donne la matrice M^4 :

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

- a) Combien y-a-t-il de chemins qui, en quatre étapes, partent de D et reviennent à D?
- b) Combien y-a-t-il de chemins qui, en quatre étapes, partent de S et arrivent à C? Citer ces chemins.
.....
.....
- c) Est-il toujours possible de joindre en quatre étapes deux salles quelconques?
3. Le responsable du data center souhaite différencier chaque salle de sa ou ses salles voisines (accessible par une porte) par la couleur de la moquette posée au sol. À l'aide du tableau ci-dessous, proposer une répartition de couleurs qui réponde au problème.

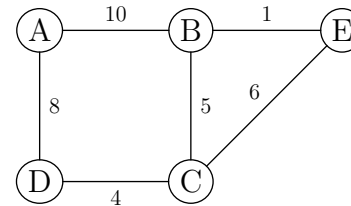
Sommet									
Degré									
Couleur									

5) Graphes pondérés

Vocabulaire

Un *graphe pondéré* est un graphe sur lequel on affecte à chaque arête un coefficient (qui peut représenter une distance, un temps de parcours, un coût etc.). On appelle alors *poids* d'une chaîne la somme des coefficients sur les arêtes qui la composent.

Exemple de graphe pondéré :



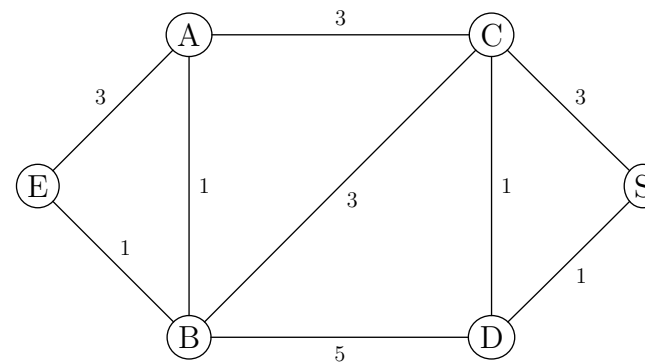
Le poids de la chaîne A-B-C-E est égal à

Le poids de la chaîne A-D-C-E est égal à

6) Chaîne de poids minimal - Algorithme de Dijkstra

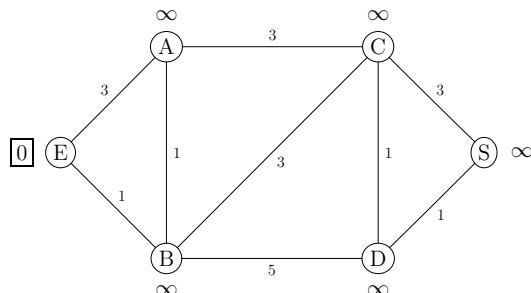
Dans de nombreuses situations modélisées par un graphe pondéré, on est amené à chercher la chaîne reliant deux sommets dont le poids est minimal (recherche de distance minimale, de plus faible coût, etc.). Pour cela une méthode efficace consiste à utiliser l'algorithme de Dijkstra que nous allons détailler avec l'exemple suivant :

Exemple : recherche de la chaîne de poids minimal du sommet E au sommet S.



• **Étape 1 :**

- On associe le coefficient 0 au sommet de départ E;
- On associe le coefficient ∞ aux autres sommets;
- On sélectionne le sommet de départ E en l'encadrant.

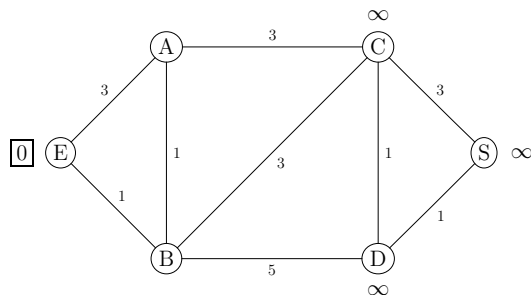


• **Étape 2 :**

- Pour chaque arête sortant de E et qui se termine par un sommet non encore sélectionné, on ajoute le coefficient affecté à E (c'est à dire 0) au poids de l'arête.
Si le résultat est inférieur au coefficient actuel du sommet auquel aboutit l'arête, on affecte à ce sommet ce résultat comme nouveau coefficient (en précisant de quel sommet il provient).
- On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés.

Résultat :

- A passe de « ∞ » à « 3 de E » car
- B passe de « ∞ » à « 1 de E » car
- On sélectionne le sommet B en l'encadrant.



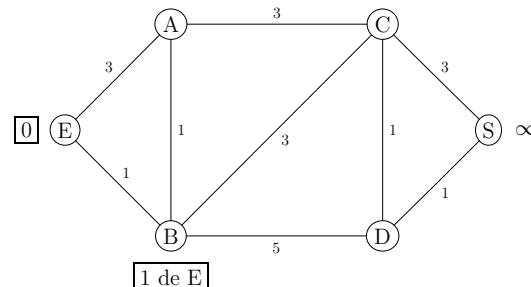
• **Étape 3 :**

- Pour chaque arête sortant de B et qui se termine par un sommet non encore sélectionné, on ajoute le coefficient affecté à B (c'est à dire 1) au poids de l'arête.
Si le résultat est inférieur au coefficient actuel du sommet auquel aboutit l'arête, on affecte à ce sommet ce résultat comme nouveau coefficient (en précisant de quel sommet il provient).
- On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés.

Résultat :

- A passe de « 3 de E » à « 4 de B » car
- C passe de « ∞ » à « 4 de B » car
- D passe de « ∞ » à « 6 de B » car
- On sélectionne le sommet C en l'encadrant (car c'est le sommet non

encore sélectionné qui a le coefficient le plus bas).

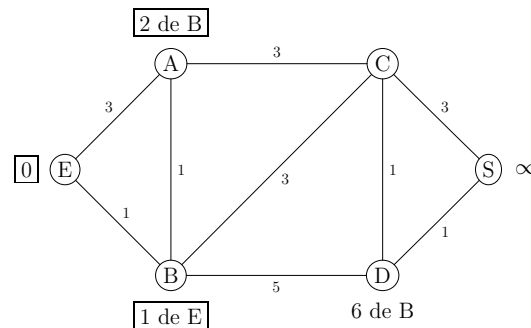


• **Étape 4 :**

- Pour chaque arête sortant de C et qui se termine par un sommet non encore sélectionné, on ajoute le coefficient affecté à C (c'est à dire 4) au poids de l'arête.
Si le résultat est inférieur au coefficient actuel du sommet auquel aboutit l'arête, on affecte à ce sommet ce résultat comme nouveau coefficient (en précisant de quel sommet il provient).
- On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés.

Résultat :

- C reste à « 4 de B » car
- On sélectionne le sommet D en l'encadrant (car c'est le sommet non encore sélectionné qui a le coefficient le plus bas).

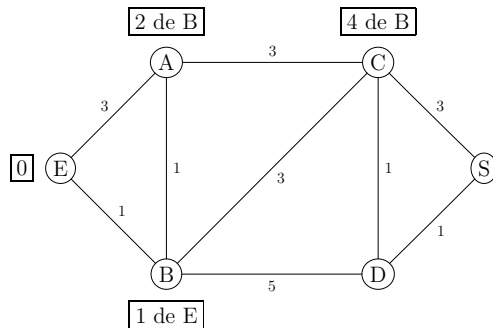


• **Étape 5 :**

- Pour chaque arête sortant de C et qui se termine par un sommet non encore sélectionné, on ajoute le coefficient affecté à C (c'est à dire 4) au poids de l'arête.
Si le résultat est inférieur au coefficient actuel du sommet auquel aboutit l'arête, on affecte à ce sommet ce résultat comme nouveau coefficient (en précisant de quel sommet il provient).
- On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés.

Résultat :

- D passe de « 6 de B » à « 4 de C » car
- S passe de « ∞ » à « 5 de D » car
- On sélectionne le sommet S en l'encadrant (car c'est le sommet non encore sélectionné qui a le coefficient le plus bas).

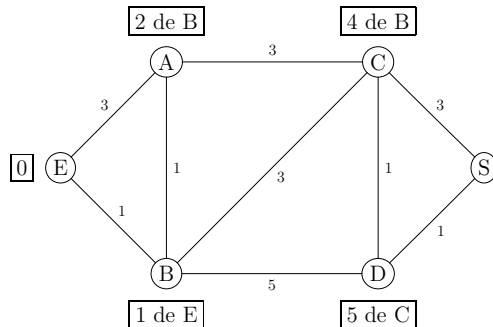


• **Étape 6 :**

- Pour chaque arête sortant de D et qui se termine par un sommet non encore sélectionné, on ajoute le coefficient affecté à D (c'est à dire 5) au poids de l'arête.
Si le résultat est inférieur au coefficient actuel du sommet auquel aboutit l'arête, on affecte à ce sommet ce résultat comme nouveau coefficient (en précisant de quel sommet il provient).
- On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés.

Résultat :

- S passe de « 7 de C » à « » car
- On sélectionne le sommet en l'encadrant.
- Tous les sommets sont ont été sélectionnés : l'algorithme est terminé.



- On détermine alors la chaîne de poids minimal en « remontant » le parcours à partir de S :

- S vient de ;
- vient de ;
- vient de ;
- vient de ;

La chaîne de poids minimal de E à S est donc :

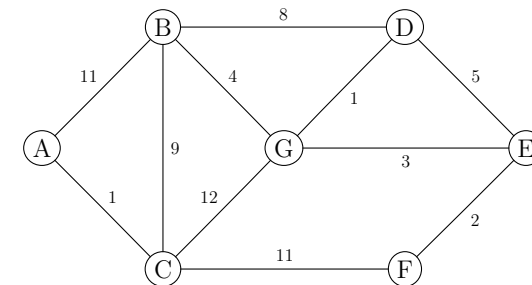
Son poids total est égal à 6 (1+3+1+1).

— ALGORITHME DE DIJKSTRA —

- **Initialisation :** on affecte 0 au sommet de départ et ∞ aux autres sommets et on sélectionne le sommet de départ.
- **À chaque étape :**
Pour chaque arête sortant du dernier sommet sélectionné et se terminant par un sommet non encore sélectionné, on ajoute le coefficient du sommet sélectionné au poids de l'arête.
Si le résultat est inférieur au coefficient actuel du sommet auquel aboutit l'arête, on affecte à ce sommet ce résultat comme nouveau coefficient (en précisant de quel sommet il provient).
On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés.
- On répète le processus jusqu'à ce que tous les sommets soient sélectionnés.

► **Exercice n°47**

Déterminer la chaîne de poids minimal entre les sommets D et A dans le graphe ci-dessous (compléter au fur et à mesure les étapes dessous le graphe) :

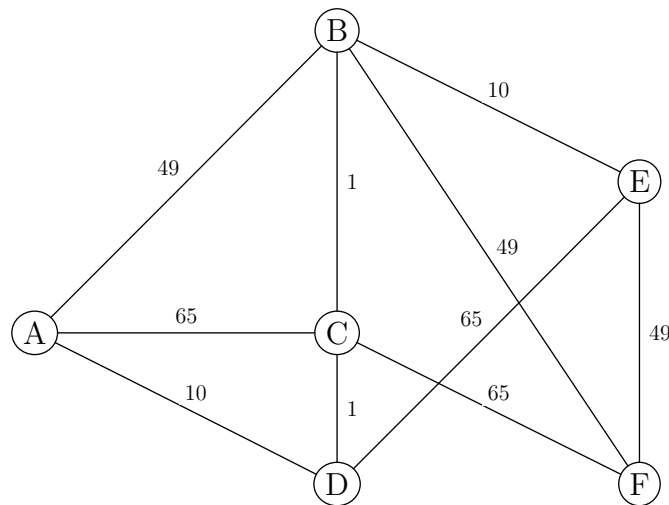


- Étape 1 : sélection de D
- Étape 2 :
- Étape 3 :
- Étape 4 :
- Étape 5 :
- Étape 6 :
- Étape 7 :
- Chaîne de poids minimal entre D et A :

► Exercice n°48

Pour acheminer des paquets de données, les algorithmes de routage peuvent prendre en compte la bande passante de chaque liaison entre les routeurs. On attribue alors un *coût* à chaque liaison inversement proportionnel à la bande passante : ainsi plus le *coût* est faible, plus la liaison est rapide (un coût de 1 correspond à une liaison en fibre optique).

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent des routeurs et le poids de chaque arête indique le *coût* de la liaison. Déterminer la chaîne qui correspond à la liaison la plus rapide entre les routeurs A et E (compléter au fur et à mesure les étapes dessous le graphe) :

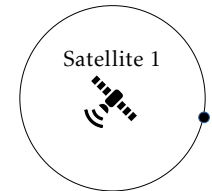


- Étape 1 : sélection de A
- Étape 2 :
- Étape 3 :
- Étape 4 :
- Étape 5 :
- Étape 6 :
- Liaison la plus rapide entre A et E :

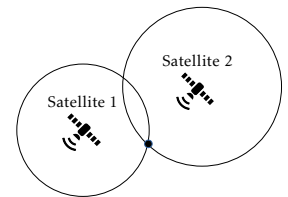
— Info sur la géolocalisation par satellite —

Principe pour déterminer les coordonnées précises d'un appareil via un système de géolocalisation par satellite (GPS ,Galileo ,...) :

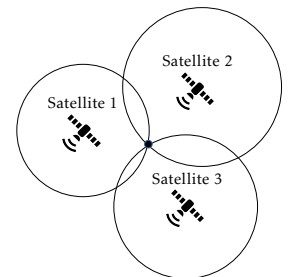
L'appareil envoie un signal vers des satellites. Grâce à une mesure très précise du temps mis entre la réception et l'émission du signal, un premier satellite peut déterminer à quelle distance précise de lui se trouve l'appareil et donc sur quelle sphère centrée en lui se trouve l'appareil. Mais cela ne suffit pas à déterminer où sur la sphère se trouve l'appareil. (ci-contre : vision simplifiée de la sphère - le point représente l'appareil)



Un deuxième satellite capte aussi le signal et détermine sur quelle sphère centrée en lui se trouve l'appareil. L'appareil doit donc se trouver à l'intersection des deux sphères.



Un troisième satellite captant aussi le signal permet finalement de déterminer les coordonnées précises de l'appareil à l'intersection des trois sphères.



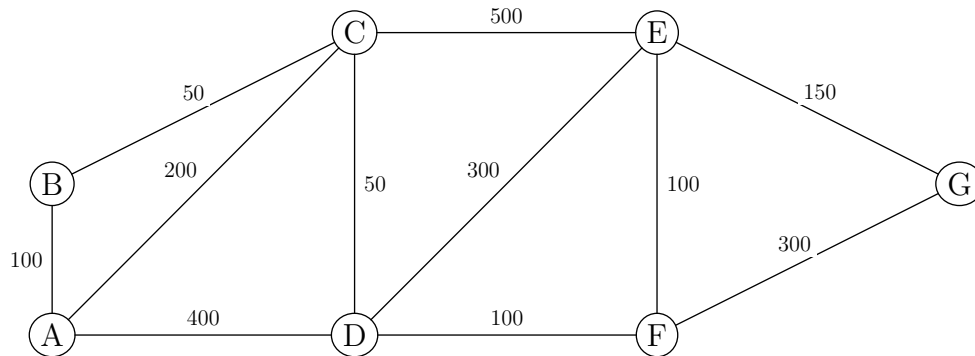
Remarques :

- Il faut une mesure très précise du temps pour que cela fonctionne. C'est pour cela que les satellites embarquent des horloges atomiques ultra-précises.
- Il faut aussi que les trois satellites et l'appareil dont on veut la position soit parfaitement synchronisés. C'est pour cela que dans les faits, il faut un quatrième satellite pour synchroniser l'horloge de l'appareil avec celui des satellites.
- Ce procédé s'appelle la et permet aux systèmes de navigation de fournir de nombreux services.

► **Exercice n°49**

Le graphe ci-dessous représente les itinéraires possibles à un piéton souhaitant aller du point A au point G. Les arêtes indiquent la distance en mètres entre deux points. Le piéton demande au service de navigation de son téléphone le chemin le plus court pour aller de A à G.

Déterminer quelle va être la proposition du système de navigation (compléter au fur et à mesure les étapes dessous le graphe) :

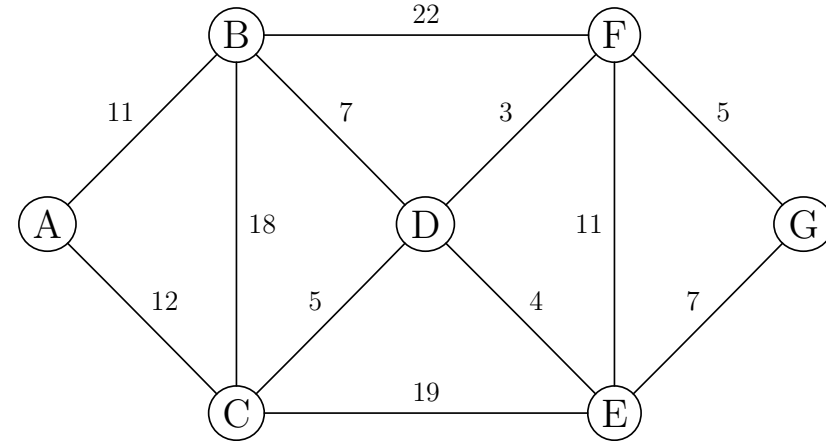


- Étape 1 : sélection de A
- Étape 2 :
- Étape 3 :
- Étape 4 :
- Étape 5 :
- Étape 6 :
- Étape 7 :
- Itinéraire le plus court :

► **Exercice n°50**

Dans un jeu vidéo, un joueur circule dans des catacombes infestées de monstres qu'il doit combattre.

On a représenté ci-dessous le graphe modélisant ces catacombes. Les sommets représentent les salles et les arêtes représentent les couloirs. Les nombres sur les arêtes correspondent au nombre de monstres présents dans chaque couloir.



1. Donner un chemin qui permette à un joueur en A d'y revenir après avoir parcouru tous les couloirs une et une seule fois.
.....
2. Un joueur situé en G souhaite parvenir en A en affrontant le minimum de monstres. Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra un chemin qui réponde au problème.

- Étape 1 : sélection de G
- Étape 2 :
- Étape 3 :
- Étape 4 :
- Étape 5 :
- Étape 6 :
- Étape 7 :

Chemin avec le minimum de monstres :

3. À l'aide de l'algorithme du cours, proposer une coloration du plan des catacombes de telle façon que deux salles reliées par un couloir n'aient pas la même couleur :

Sommet							
Degré							
Couleur							

2. Les graphes orientés

Dans certains cas les relations symbolisées par les arêtes entre deux sommets d'un graphe ne peuvent avoir lieu que dans un sens. On ajoute alors un sens symbolisé par une flèche aux arêtes et le graphe est dit orienté dans ce cas là (les principales propriétés des graphes rencontrées jusque là restent valides).

► Exercice n°51

Dans certains réseaux sociaux, les relations ne sont pas centrées autour du concept réciproque d'« amis », mais sur le fait que des membres peuvent « suivre » d'autres membres sans que cela soit réciproque. Les graphes orientés sont alors tout à fait adaptés :

Cinq élèves (notés A, B, C, D et E) sont membres d'un réseau social où :

- A suit ce que publient B, C et E;
- B suit ce que publient A, C et D;
- C ne suit aucun autre élève;
- D suit ce que publient B et C;
- E suit ce que publie D.

1. Compléter le graphe orienté ci-dessous en ajoutant une arête fléchée quand l'élève de départ suit l'élève d'arrivée (un tel graphe est appelé *sociogramme* par certains).

(B) (C)

(A)

(E) (D)

2. Compléter la matrice d'adjacence du graphe ci-dessous (*attention à partir de la ligne pour arriver à la colonne et à bien regarder si le parcours de l'arête est possible pour mettre un 1*)

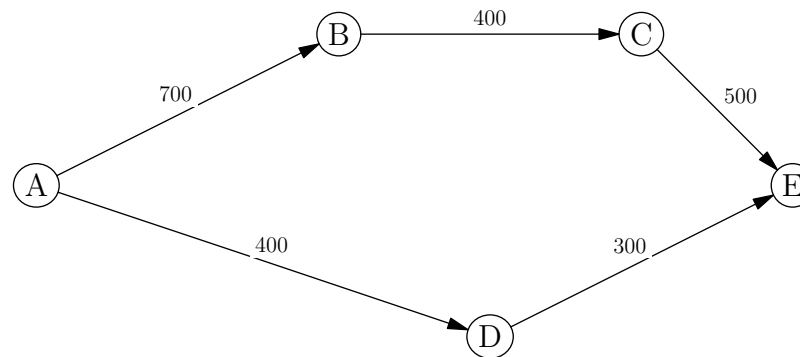
	A	B	C	D	E
A	...	...	...	...	...
B	...	...	...	...	...
C	...	...	...	...	...
D	...	...	...	...	...
E	...	...	...	...	...

3. Comment peut-on déterminer l'élève qui est le plus suivi par les autres ?

.....

► Exercice n°52

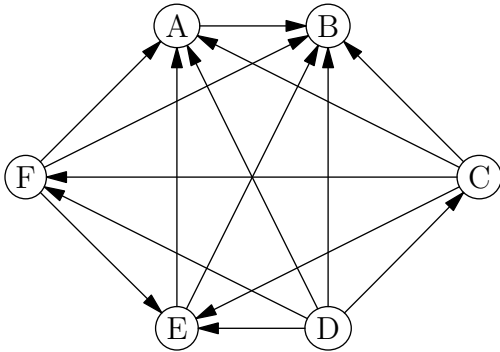
Le graphe orienté ci-dessous schématise les deux routes possibles par lesquelles doit passer un internaute depuis son poste de travail, symbolisé par le sommet A, pour joindre un site hébergé sur le serveur E. Le nombre indiqué sur chaque arête représente le nombre maximum de connexions simultanées que peut supporter le serveur d'arrivée.



Combien de connexions simultanées sont-elles possibles en tout pour le site hébergé sur le serveur E ?

► **Exercice n°53**

Dans le graphe orienté ci-dessous :



- chaque sommet représente un joueur d'e-sport lors d'une phase éliminatoire;
- une arête indique que le joueur de départ a battu le joueur d'arrivée.

1. Compléter ci-dessous la matrice d'adjacence de ce graphe.

	A	B	C	D	E	F
A	...	...	...	...	...	...
B	...	...	...	...	...	...
C	...	...	...	...	...	...
D	...	...	...	...	...	...
E	...	...	...	...	...	...
F	...	...	...	...	...	...

2. Que représente la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice?

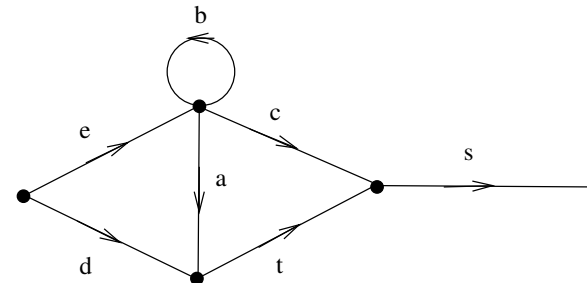
3. Que représente la somme des coefficients de chaque colonne de la matrice?

4. Une victoire rapporte 2 points et une défaite 0 point. Déterminer quel joueur a le meilleur à l'issue de cette phase éliminatoire.

► **Exercice n°54**

Dans de nombreux sites web nécessitant une inscription, il est souvent demandé de prouver à travers un petit test si le visiteur n'est pas un « robot » (c'est à dire un programme informatique qui pourrait compromettre le site avec des milliers de fausses inscriptions).

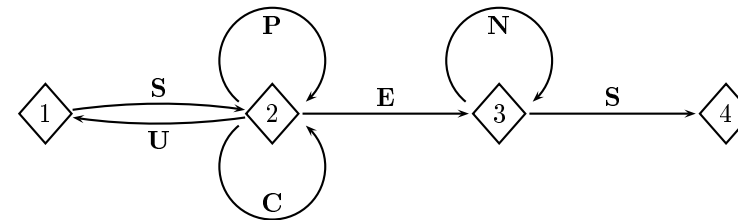
Comme test, un site demande aux visiteurs de rentrer un mot qui ne peut être formé qu'en parcourant un graphe comme dans l'exemple ci-dessous :



Avec cet exemple, les mots « ebcs », « ebacs », « dts », « ebbats » et « eats » seront-ils reconnus comme valides?

► **Exercice n°55**

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, en partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4.

1. Le code SUCCES est-il reconnu valide par le graphe?

2. Le code SCENES est-il reconnu valide par le graphe?

3. Le code SUSPENS est-il reconnu valide par le graphe?

4. Compléter la matrice d'adjacence M associée au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre 1-2-3-4.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

5. On admet que $M^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe :

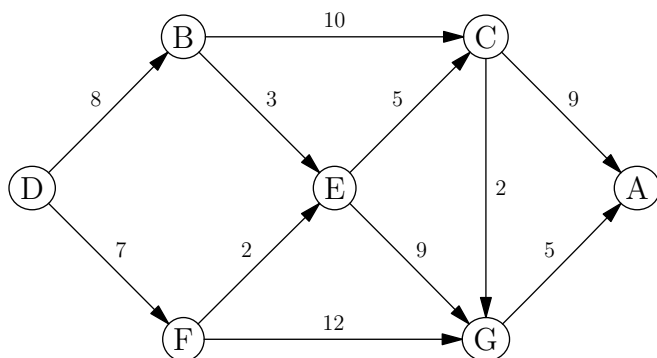
Quels sont ces codes ?

.....

► Exercice n°56

Le graphe ci-dessous représente un réseau de cours d'eau que les joueurs d'un jeu en ligne peuvent parcourir à l'aide d'une barque :

- Le sommet D représente la ligne de départ et le sommet A, la ligne d'arrivée.
- Une flèche indique le sens d'écoulement de l'eau ;
- Le nombre sur chaque arête indique le nombre d'épreuves à passer entre deux jonctions.



1. Compléter ci-dessous la matrice d'adjacence de ce graphe.

	A	B	C	D	E	F	G	
A	...	...	...	...	...	...	...	A
B	...	...	...	...	...	...	...	B
C	...	...	...	...	...	...	...	C
D	...	...	...	...	...	...	...	D
E	...	...	...	...	...	...	...	E
F	...	...	...	...	...	...	...	F
G	...	...	...	...	...	...	...	G

2. Citer tous les parcours permettant d'aller de D en A en ne parcourant que 3 cours d'eau.

.....

.....

3. Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra le circuit qui permet d'aller de D en A en affrontant le moins d'épreuves possible :

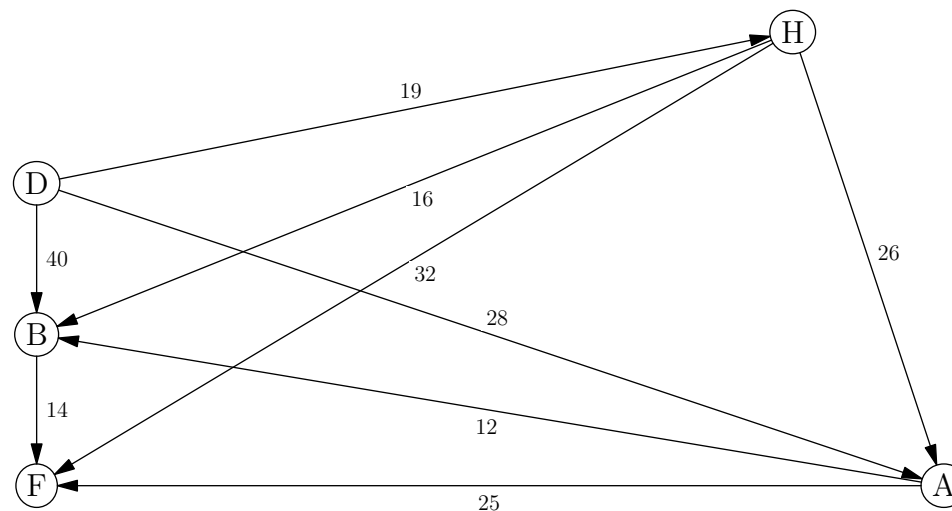
- Étape 1 : sélection de D
- Étape 2 :
- Étape 3 :
- Étape 4 :
- Étape 5 :
- Étape 6 :
- Étape 7 :

Circuit à emprunter :

► Exercice n°57

Un parcours sportif virtuel fourni par une application de fitness est représenté par le graphe orienté ci-dessous où :

- Le sommet D représente le départ ;
- Le sommet F représente la fin du parcours ;
- Les sommets B, H et A représentent des exercices de fitness à effectuer ;
- Les arêtes représentent des temps de course sur tapis roulant à effectuer entre deux sommets.



1. On note M la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans

l'ordre alphabétique. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Combien de parcours de 3 arêtes sont-ils possibles de D à F?

Citer ses parcours :

.....

2. Un utilisateur souhaite courir le moins longtemps possible sur tapis roulant en allant de D à F. Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le trajet pour lequel le temps de course est minimal :

- Étape 1 : sélection de D
- Étape 2 :
- Étape 3 :
- Étape 4 :
- Étape 5 :

Trajet à effectuer :

3. Le concepteur de l'application souhaite ajouter un exercice noté T créant ainsi de nouveaux parcours possibles. La matrice d'adjacence N associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés dans l'ordre alphabétique, est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter le graphe ci-dessous , en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté pour qu'il corresponde à la matrice N .

