Spécialité - 1re générale

Fonction exponentielle

https://www.xm1math.net

1. Introduction

a) Présupposé

On admet qu'il existe une unique fonction, notée exp, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est égale à elle-même et dont l'image de 0 est égale à 1. Autrement dit, $\exp(0) = 1$ et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle.

b) Conséquences

- Si pour tout x, $\exp'(x) = \exp(x)$, on a $\exp'(-x) = -\exp(-x)$ et $\exp'(x+a) = \exp(x+a)$ (d'après la formule sur la dérivée des fonctions de la forme $f(ax+b)$).
- Pour tout réel a, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x+a) \times \exp(-x)$:
  - On a $f(0) = \exp(a) \times \exp(0) = \exp(a)$.
  - Pour tout x, $f'(x) = \exp(x+a) \times \exp(-x) + \exp(x+a) \times (-\exp(-x)) = 0$. Donc f est une fonction constante, ce qui veut dire que, pour tout x, $f(x) = f(0)$. On en conclut que, $\boxed{\text{pour tout } x,\ \exp(x+a) \times \exp(-x) = \exp(a)}$ (lemme 1)
- Si on applique le lemme 1 avec $a = 0$, on obtient que, pour tout x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$:
  - cela implique qu'il ne peut pas exister de x tel que $\exp(x)$ serait nul, car sinon on ne pourrait pas avoir $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. On peut en déduire, que $\boxed{\text{pour tout } x,\ \exp(x) \neq 0}$ (propriété 1).
  - Du coup, on peut aussi en déduire, que $\boxed{\text{pour tout } x,\ \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$ (propriété 2).

1. Introduction

- Ainsi, le lemme 1 devient : pour tous réels x et a, $\exp(x+a) \times \dfrac{1}{\exp(x)} = \exp(a)$
  $\Leftrightarrow \exp(x+a) = \exp(x) \times \exp(a)$. En remplaçant x par b, on obtient :
  $\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b,\ \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)}$ (propriété 3).
- On peut en déduire que :
  - $\exp(a-b) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \dfrac{1}{\exp(b)} = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$.
  - $\exp(2a) = \exp(a+a) = \exp(a) \times \exp(a) = (\exp(a))^2$;
  - $\exp(3a) = \exp(a+2a) = \exp(a) \times \exp(2a) = \exp(a) \times (\exp(a))^2 = (\exp(a))^3$;
  - pour tout entier positif $n \geqslant 1$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$ (en extrapolant).
- Si on note e la valeur de $\exp(1)$, on a pour tout entier positif $n \geqslant 1$,
  $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
  Du coup, on a aussi $\exp(-n) = \dfrac{1}{\exp(n)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e}^{-n}$.

c) Nouvelle notation

Comme pour tout entier, positif ou négatif, $\exp(n) = \mathrm{e}^n$ et comme la fonction exponentielle suit les mêmes règles algébriques que les puissances, $\exp(x)$ est souvent remplacée par la notation e^x pour n'importe quel réel x.

2. Propriétés générales

Propriété(s)

En notant e la valeur de exp(1) et en utilisant la notation e^x pour exprimer exp(x) :

- e^x *existe pour tout réel* x
- $\mathrm{e}^0 = 1$
- *Un exponentiel n'est jamais nul*
- *Pour tous réels a et b,* $e^a \times e^b = e^{a+b}$
- *Pour tout réel a,* $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$
- *Pour tous réels a et b,* $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
- *Pour tout entier n,* $(e^a)^n = e^{na}$

Ainsi, pour tout x on a : $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $(e^x)^2 = e^{2x}$; $(e^x)^3 = e^{3x}$ ...

Exemple(s)

- $\mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^{2+3} = \mathrm{e}^5$
- $\frac{\mathrm{e}^7}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{7-2} = \mathrm{e}^5$
- $\frac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}^{3x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}} = \mathrm{e}^{2x-3x} = \mathrm{e}^{-x}$
- $\frac{\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{-2x}}{(\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{5x-2x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{3x-2x} = \mathrm{e}^x$

Note : on utilise en fait des règles similaires à celles des puissances.

Propriété(s)

Un exponentiel est toujours strictement positif.

Démonstration : pour tout x, $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2$ qui est nécessairement strictement positif.

3. La fonction exponentielle

Rappel

Pour tout x, on a $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

Propriété(s)

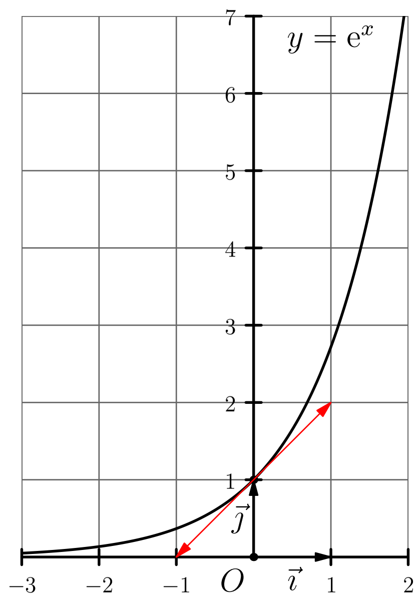
La fonction exponentielle qui à tout x associe e^x est définie, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Justification des variations : un exponentiel étant toujours strictement positif, la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Détermination d'une équation de T, la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 :

Avec $f(x) = \mathrm{e}^x$, une équation de T est
$y = f(0) + f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x + 1$
car $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

Courbe



4. Équations $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$ et inéquations

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété(s)

- $e^x = e^a \Leftrightarrow x = a$
- $e^x < e^a \Leftrightarrow x < a$
- $e^x > e^a \Leftrightarrow x > a$
- $e^x \leqslant e^a \Leftrightarrow x \leqslant a$
- $e^x \geqslant e^a \Leftrightarrow x \geqslant a$

Exemple(s)

Résolution dans $\mathbb{R}$ de :

1. l'équation $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^4$: $\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. $S = \{2\}$
2. l'équation $\mathrm{e}^{3x+6} = 1$: $\mathrm{e}^{3x+6} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x+6} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. $S = \{-2\}$
3. l'équation $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} = \mathrm{e}^4$: $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} = \mathrm{e}^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$. $S = \{2; -2\}$
4. l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} < 1$: $\mathrm{e}^{2x} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow 2x < 0 \Leftrightarrow x < 0$. $S =]-\infty; 0[$
5. l'inéquation $\mathrm{e}^{1-x} \geqslant \mathrm{e}^2$: $\mathrm{e}^{1-x} \geqslant \mathrm{e}^2 \Leftrightarrow 1 - x \geqslant 2 \Leftrightarrow 1 - 2 \geqslant x \Leftrightarrow -1 \geqslant x$. $S =]-\infty; -1]$

5. Fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax}$

a) Dérivée

Rappel

Pour tout x, on a $(\mathrm{e}^{ax})' = a\mathrm{e}^{ax}$.

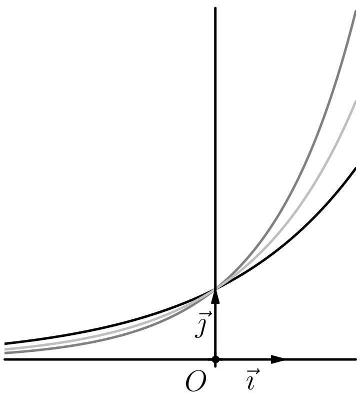
Exemple(s)

- $\left(\mathrm{e}^{2x}\right)' = 2\mathrm{e}^{2x}$
- $\left(\mathrm{e}^{-0,5x}\right)' = -0,5\mathrm{e}^{-0,5x}$

b) Modèles de croissance/décroissance exponentielle

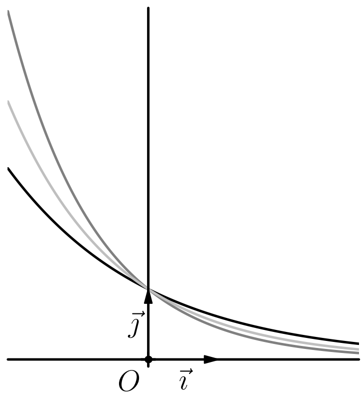
Étant donné un phénomène se modélisant par une fonction f de la forme $f(x) = ke^{ax}$. On a dès lors $f'(x) = kae^{ax}$ et :

- Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et admet une courbe de la forme :



On dit alors que le phénomène suit un **modèle de croissance exponentielle**.

- Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et admet une courbe de la forme :



On dit alors que le phénomène suit un **modèle de décroissance exponentielle**.

5. Fonctions de la forme $f(x) = ke^{ax}$

c) Lien avec les suites géométriques

Propriété(s)

Les suites de la forme $U_n = ke^{an}$ sont des suites géométriques.

Démonstration : Pour tout entier positif n, $U_n \neq 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{k\mathrm{e}^{a(n+1)}}{k\mathrm{e}^{an}} = \mathrm{e}^{an+a-an} = \mathrm{e}^{a}$.

Fin du chapitre

xm1math.net