Trigonométrie

▶ Exercice n°1

1. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \to -\frac{\pi}{3}$
2. $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right) \to -\frac{\pi}{2}$
3. $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}\right) \to \frac{\pi}{2}$
4. $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right) \to -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{12}$
5. $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right) \to \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}$
6. $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right) \to \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{12}$

▶ Exercice n°2

1. mesure principale de $\frac{13\pi}{6}$: $\frac{13\pi}{6}-2\pi=\frac{\pi}{6}$
2. mesure principale de $-\frac{37\pi}{3}$: $-\frac{37\pi}{3}+12\pi=-\frac{\pi}{3}$
3. mesure principale de $\frac{19\pi}{6}$: $\frac{19\pi}{6}-4\pi=-\frac{5\pi}{6}$
4. mesure principale de $-\frac{21\pi}{8}$: $-\frac{21\pi}{8}+2\pi=-\frac{5\pi}{8}$
5. mesure principale de -20π : 0
6. mesure principale de 11π : π

▶ Exercice n°3

1. $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2+(\sin x)^2=1 \Leftrightarrow \frac{3}{25}+(\sin x)^2=1$
   $\Leftrightarrow (\sin x)^2=\frac{22}{25} \Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{22}}{5}$ ou $-\frac{\sqrt{22}}{5}$.
   Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, le sinus doit être positif. On a donc $\sin x=\frac{\sqrt{22}}{5}$.
2. $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-2\right)^2+(\sin x)^2=1 \Leftrightarrow 3-4\sqrt{3}+4+(\sin x)^2=1$
   $\Leftrightarrow (\sin x)^2=4\sqrt{3}-6 \Leftrightarrow \sin x=\sqrt{4\sqrt{3}-6}$ ou $-\sqrt{4\sqrt{3}-6}$.
   Sur $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$, le sinus doit être négatif. On a donc $\sin x=-\sqrt{4\sqrt{3}-6}$.
3. $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1 \Leftrightarrow (\cos x)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1 \Leftrightarrow (\cos x)^2+\frac{9}{16}=1$
   $\Leftrightarrow (\cos x)^2=\frac{7}{16} \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ou $-\frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus doit être positif. On a donc $\cos x=\frac{\sqrt{7}}{4}$.
4. $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1 \Leftrightarrow (\cos x)^2+\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2=1 \Leftrightarrow (\cos x)^2+\frac{4}{5}=1$
   $\Leftrightarrow (\cos x)^2=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.
   Sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$, le cosinus doit être positif. On a donc $\cos x=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

▶ Exercice n°4

1. $A(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\cos(2\pi-x)+2\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)$
   $=-\sin x+\cos x+2\sin x-\cos x=\sin x$
2. $B(x)=\cos(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
   $=-\cos x+\sin x-\cos x=\sin x-2\cos x$
3. $C(x)=\sin(\pi+x)+\sin(3\pi-x)+\sin(x-7\pi)-\sin(9\pi-x)$
   $=-\sin x+\sin x-\sin x-\sin x=-2\sin x$
4. $D(x)=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\sin(5\pi-x)$
   $=\sin x-\cos x+\sin x=2\sin x-\cos x$

▶ Exercice n°5

1. Mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$: $\frac{7\pi}{3}-2\pi=\frac{\pi}{3}$.
   Donc $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
2. Mesure principale de $-\frac{13\pi}{4}$: $-\frac{13\pi}{4}+4\pi=\frac{3\pi}{4}$
   Donc $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. Mesure principale de $\frac{31\pi}{6}$: $\frac{31\pi}{6}-6\pi=-\frac{5\pi}{6}$
   Donc $\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. Mesure principale de -15π : π
   Donc $\sin(-15\pi)=\sin\pi=0$
5. Mesure principale de 10π : 0
   Donc $\cos(10\pi)=\cos 0=1$
6. Mesure principale de $-\frac{7\pi}{2}$: $-\frac{7\pi}{2}+4\pi=\frac{\pi}{2}$
   Donc $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

▶ Exercice n°6

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.
   $S = \left\{\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi ; -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2. $\cos x = -\dfrac{6}{5}$. Impossible un cosinus est toujours compris entre -1 et 1.
   $S = \varnothing$

3. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} - 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $\dfrac{\pi}{3} - 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$.
   $\Leftrightarrow -2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $-2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} - k\pi$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} - k\pi$
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{12} - k\pi ; \dfrac{\pi}{4} - k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

4. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

5. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

6. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ ou $2x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$
   $S = \left\{\dfrac{\pi}{12} + k\pi ; \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

7. En posant $X = \sin x$, l'équation devient $-2X^2 + X + 1 = 0$:
   $\Delta = 9$; $X_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = 1$; $X_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = -\dfrac{1}{2}$.
   $-2(\sin x)^2 + \sin x + 1 = 0$ équivaut donc à $\sin x = 1$ ou $\sin x = -\dfrac{1}{2}$:
   $\sin x = 1$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$
   $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ équivaut à $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$.
   Finalement, on a $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi ; -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi ; -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ $(k \in \mathbb{Z})$

▶ Exercice n°7

1. Dans $]-\pi ; \pi]$, $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3}$.
   $S = \left\{\frac{2\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3}\right\}$
2. Dans $[0 ; \pi]$, $\cos x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$.
   $S = \left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right[$
3. Dans $]-\pi ; \pi]$; $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$.
   $S = \left\{\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right\}$
4. Dans $[0 ; \pi]$; $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[$.
   $S = \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right]$

▶ Exercice n°8

1.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0
$\cos x$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|
$\sin x \cos x$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

2. $S = \left]-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

▶ Exercice n°9

1. a) On a $M\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$
   b) L'équation réduite de la droite (OM) est de la forme $y = mx$ (droite passant par l'origine) avec $m = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
   L'équation réduite de (OM) est donc $y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x$.
   c) Si $x = 1$ on a $y = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. L'ordonnée du point P est donc $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
2. a) $\tan 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$
   b) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
   c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

d) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

► **Exercice n°10**

1. NON. Contre exemple : si A est entre B et C, la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est alors égale à π.
2. « Si la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est égale à 0 alors A, B et C sont alignés. »
3. OUI car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont alors colinéaires.