Suites numériques

▶ Exercice n°1

1. $U_0 = \dfrac{0}{3} = 0$, $U_3 = \dfrac{6}{6} = 1$, $U_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{(n+1)+3} = \dfrac{2n+2}{n+4}$.
2.

```
n=int(input("n=?"))
U=2*n/(n+3)
print(U)
```

▶ Exercice n°2

1. $U_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. $U_9 = \dfrac{9}{10}$, $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)}{(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

▶ Exercice n°3

1. $U_1 = 5 - 3U_0 = 2$ et $U_2 = 5 - 3U_1 = -1$.
2.

```
U=1
n=int(input("n=?"))
for i in range(n):
  U=5-3*U
print(U)
```

▶ Exercice n°4

1. $U_{n+1} = 4U_n - 3$.
2. $U_0 = 2$ d'après le script. Dès lors, on a $U_1 = 4U_0 - 3 = 5$ et $U_2 = 4U_1 - 3 = 17$.

▶ Exercice n°5

$U_n = \dfrac{1}{n+1}$.

▶ Exercice n°6

$U_n = n^2 + 1$.

▶ Exercice n°7

$U_{n+1} = U_n + 12$

▶ Exercice n°8

$U_{n+1} = -\frac{1}{2}U_n$

▶ Exercice n°9

1. Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 3(n+1) - 7 - 3n + 7 = 3 \geqslant 0$. (U_n) est croissante.
2. Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -\dfrac{1}{n+1} \leqslant 0$. (U_n) est décroissante.

▶ Exercice n°10

1. Pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{2^{n+1}}{5}}{\frac{2^n}{5}} = \dfrac{2^{n+1}}{5} \times \dfrac{5}{2^n} = 2 \geqslant 1$. (U_n) est croissante.
2. Pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}}{\frac{2^{n+1}}{3^n}} = \dfrac{2^{n+2}}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{2^{n+1}} = \dfrac{2}{3} \leqslant 1$. (U_n) est décroissante.

▶ Exercice n°11

1. On a $U_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x + x^2$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 1 + 2x \geqslant 0$. f est croissante sur $[0;+\infty[$, donc (U_n) est croissante.
2. On a $U_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{x+2}$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \dfrac{-(x+2)-(1-x)}{(x+2)^2} = \dfrac{-3}{(x+2)^2} \leqslant 0$. f est décroissante sur $[0;+\infty[$, donc (U_n) est décroissante.

▶ Exercice n°12

1. Méthode 2 : Pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = 5 \geqslant 1$. (U_n) est croissante.
2. La méthode 1 est la seule possible car U_n n'est pas toujours strictement positif et passer par une fonction n'est pas possible à ce niveau.
   Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = (-3)^{n+1} - (-3)^n = (-3)^n(-3-1) = -4(-3)^n$ qui change constamment de signe. (U_n) est ni croissante, ni décroissante.
3. Méthode 1 : Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -(U_n)^2$ qui reste forcément négatif. (U_n) est décroissante.
4. Méthode 3 : $U_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^3$. Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$. f est croissante sur $[0;+\infty[$, donc (U_n) est croissante.

▶ Exercice n°13

1. $U_2 = U_0 + 2r = 12$, $U_{13} = U_0 + 13r = 67$.
2. $U_n = U_0 + nr = 2 + 5n$.
3. (U_n) est croissante car $r > 0$.

▶ **Exercice n°14**
$U_7 = U_4 + 3r = 34$, $U_0 = U_4 - 4r = 13$.

▶ **Exercice n°15**
$U_{11} = U_4 + 7r \Leftrightarrow 19 = 5 + 7r \Leftrightarrow 14 = 7r \Leftrightarrow r = 2$.
$U_0 = U_4 - 4r = -3$.

▶ **Exercice n°16**
$$\begin{cases} U_2 + U_3 + U_4 = 15 \\ U_6 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_0 + 2r + U_0 + 3r + U_0 + 4r = 15 \\ U_0 + 6r = 20 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 3U_0 + 9r = 15 \\ U_0 + 6r = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2L_1 - 3L_2 \\ L_1 - 3L_2 \end{array} \begin{cases} 3U_0 = -30 \\ -9r = -45 \end{cases}.$$
On en déduit que $U_0 = -10$ et $r = 5$.

▶ **Exercice n°17**

1. Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2 =$ constante. Donc (U_n) est arithmétique de raison $r = 2$.
2. Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ qui n'est pas constant. (U_n) n'est pas arithmétique.
   On peut aussi montrer que $U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$.

▶ **Exercice n°18**

1. $\frac{3}{100} \times 8000 = 240$
2. (U_n) est arithmétique de raison $r = 240$.
3. $U_n = U_0 + nr = 8000 + 240n$.
4. $U_{15} = 8000 + 240 \times 15 = 11600$

▶ **Exercice n°19**
$U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{U_0 + U_{10}}{2} = 11 \times \dfrac{1 + 21}{2} = 121$ car $U_{10} = U_0 + 10r = 21$.
$U_{20} + U_{21} + \cdots + U_{43} = 24 \times \dfrac{U_{20} + U_{43}}{2} = 24 \times \dfrac{41 + 87}{2} = 1536$ car $U_{20} = U_0 + 20r = 41$ et $U_{43} = U_0 + 43r = 87$.

▶ **Exercice n°20**
$1 + 2 + 3 + \cdots + n = 276 \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 276 \Leftrightarrow n^2 + n - 552 = 0$.
$\Delta = 2209$, $n_1 = \dfrac{-1 - 47}{2} = -24$, $n_2 = \dfrac{-1 + 47}{2} = 23$.
Il faut $n = 23$.

▶ **Exercice n°21**

1. $U_2 = q^2 \times U_0 = 45$; $U_5 = q^5 \times U_0 = 1215$.
2. $U_n = q^n \times U_0 = 3^n \times 5$.
3. $U_0 > 0$ et $q > 1$ donc (U_n) est croissante.

▶ **Exercice n°22**

1. $U_3 = q^2 \times U_0 = 4$; $U_6 = q^6 \times U_0 = \frac{1}{2}$.
2. $U_n = q^n \times U_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 32$
3. $U_0 > 0$ et $0 < q < 1$ donc (U_n) est décroissante.

▶ **Exercice n°23**
$U_4 = q^4 \times U_0 \Leftrightarrow 81 = 3^4 \times U_0 \Leftrightarrow U_0 = 1$
$U_7 = q^3 \times U_4 = 2187$.

▶ **Exercice n°24**
$2U_2 = 3U_1 - U_0 \Leftrightarrow 2q^2U_0 = 3qU_0 - U_0 \Leftrightarrow 2q^2U_0 - 3qU_0 + U_0 = 0$
$\Leftrightarrow U_0\left(2q^2 - 3q + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2q^2 - 3q + 1$ car $U_0 \neq 0$.
$\Delta = 1$, $q_1 = \dfrac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}$, $q_2 = \dfrac{3 + 1}{4} = 1$. Il faut $q = \frac{1}{2}$ ou $q = 1$.

▶ **Exercice n°25**

1. Pour tout n, $U_n \neq 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{-4 \times 5^{n+1}}{-4 \times 5^n} = 5 =$ constante. Donc (U_n) est géométrique de raison 5.
2. Pour tout n, $U_n \neq 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{\frac{1}{2(n+1)+1}}{\frac{1}{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n+3}$ qui n'est pas constant. (U_n) n'est pas géométrique.
   On peut aussi montrer que $\dfrac{U_2}{U_1} \neq \dfrac{U_1}{U_0}$.

▶ **Exercice n°26**

1. Diminuer de 20% revient à multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$. (I_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$.
2. $I_n = q^n \times U_0 = 0{,}8^n \times 50$.
3. $I_4 = 0{,}8^4 \times 50 = 20{,}48$

4.

```
n=0
I=50
while I>1 :
  I=0.8*I
  n=n+1
print(n)
```

▶ Exercice n°27

1. capital d'une année=capital de l'année précédente+intérêts.
   On a donc $U_{n+1} = U_n + \frac{3}{100} \times U_n = \left(1 + \frac{3}{100}\right) U_n = 1{,}03U_n$
2. (U_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$.
3. $U_n = q^n \times U_0 = 1{,}03^n \times 8000$.
4. $U_8 = 1{,}03^8 \times 8000 = 10134{,}2$

▶ Exercice n°28

1. On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par 0,5. (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$.
2. a) $U_n = q^n \times U_0 = 0{,}5^n \times 5$.
   b) 10500 ans correspond à 7 périodes de désintégration et $U_7 = 0{,}5^7 \times 5 \approx 0{,}04$

▶ Exercice n°29

$U_0 + U_1 + \cdots + U_{12} = U_0 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = 8191$

$U_2 + U_3 + \cdots + U_{15} = U_2 \times \dfrac{1-2^{14}}{1-2} = 4\left(2^{14}-1\right) = 65532.$

▶ Exercice n°30

1. On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours 450. Donc (U_n) est arithmétique de raison 450 et pour tout n, et $U_n = U_0 + 450n = 20000 + 450n$.
2. On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par $\left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1{,}02$, donc (V_n) est géométrique de raison 1,02 et pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = 19900 \times 1{,}02^n$.
3.

```
for n in range(20):
  U=20000+450*n
  V=19900*1.02**n
  if U>V:
    print("Pour n=",n," la proposition 1 est la meilleure")
  else:
    print("Pour n=",n," la proposition 2 est la meilleure")
```

▶ Exercice n°31

1. $U_{n+1} = 0{,}9U_n + 2$; $U_0 = 25$.
2. $U_1 = 0{,}9U_0 + 2 = 24{,}5$; $U_2 = 0{,}9U_1 + 2 = 24{,}05$.
3. a) $V_0 = U_0 - 20 = 5$; $V_1 = U_1 - 20 = 4{,}5$; $V_2 = U_2 - 20 = 4{,}05$.
   b) Pour tout n, $V_n \neq 0$ et $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-20}{U_n-20} = \dfrac{0{,}9U_n+2-20}{U_n-20} = \dfrac{0{,}9U_n-18}{U_n-20}$
   $= \dfrac{0{,}9\,(U_n-20)}{U_n-20} = 0{,}9$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$.
   c) $V_n = q^n \times V_0 = 0{,}9^n \times 5$.
   $V_n = U_n - 20$ donc $U_n = V_n + 20 = 0{,}9^n \times 5 + 20$.
4. $U_{10} = 0{,}9^{10} \times 5 + 20 \approx 21{,}743$.
5. $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1-0{,}9^{10}}{1-0{,}9} \approx 32{,}57$.
   $U_0+U_1+\cdots+U_9 = V_0+20+V_1+20+\cdots+V_9+20 = V_0+V_1+\cdots+V_9+10\times20 \approx 232{,}57$

▶ Exercice n°32

1. Diminuer de 2 % revient à multiplier par 0,98 et on ajoute les 5 litres d'eau.
2. a) Pour tout n, $V_n \neq 0$ et $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-250}{U_n-250} = \dfrac{0{,}98U_n+5-250}{U_n-250}$
   $= \dfrac{0{,}98U_n-245}{U_n-20} = \dfrac{0{,}98\,(U_n-250)}{U_n-250} = 0{,}98$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 250 = 30$.
   b) $V_n = q^n \times V_0 = 0{,}98^n \times 30$.
   $V_n = U_n - 250$ donc $U_n = V_n + 250 = 0{,}98^n \times 30 + 250$.
3. Pour tout n, $0{,}98^n \times 30 > 0$ et donc $U_n > 250$. La préconisation est respectée.

▶ Exercice n°33

1. Pour tout entier positif n, on a $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n + 200$, car réduire de 20% revient à multiplier par 0,8 et il faut ajouter ensuite les 200 jeunes.
2. Pour tout entier positif n :
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 1000}{U_n - 1000} = \dfrac{0{,}8 \times U_n + 200 - 1000}{U_n - 1000} = \dfrac{0{,}8 \times U_n - 800}{U_n - 1000}$
$= \dfrac{0{,}8\,(U_n - 1000)}{U_n - 1000} = 0{,}8.$
(V_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1000 = 500$.
3. Pour tout entier positif n, on a $V_n = q^n \times V_0 = 0{,}8^n \times 500$. Or, $U_n = V_n + 1000$. On en déduit que $U_n = 500 \times 0{,}8^n + 1000$.
4. Pour tout entier positif n :
$U_{n+1} - U_n = 500 \times 0{,}8^{n+1} + 1000 - (500 \times 0{,}8^n + 1000)$
$= 500 \times 0{,}8^{n+1} - 500 \times 0{,}8^n = 500 \times 0{,}8^n\,(0{,}8 - 1) = -100 \times 0{,}8^n < 0.$
(U_n) est bien décroissante.
5.

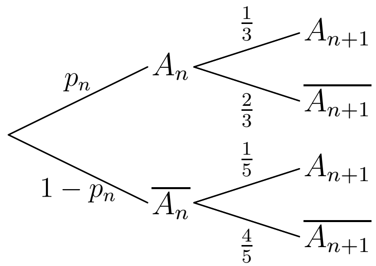
```
annee=2024
U=1500
while U>=1150 :
  U=0.8*U+200
  annee=annee+1
print(annee)
```

▶ Exercice n°34

1. Pour tout n, $V_n \neq 0$ et $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} - 100A}{U_n - 100A} = \dfrac{1{,}01U_n - A - 100A}{U_n - 100A}$
$= \dfrac{1{,}01U_n - 101A}{U_n - 100A} = \dfrac{1{,}01\,(U_n - 100A)}{U_n - 100A} = 1{,}01$. Donc (V_n) est géométrique de raison $q = 1{,}01$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 100A = 120\,000 - 100A$.
2. $V_n = q^n \times V_0 = 1{,}01^n \times [120\,000 - 100A]$.
$U_n = V_n + 100A = 1{,}01^n \times [120\,000 - 100A] + 100A$
3. $U_{15} = 0 \Leftrightarrow 1{,}01^{15} \times [120\,000 - 100A] + 100A = 0.$
$\Leftrightarrow 1{,}01^{15} \times 120\,000 - 1{,}01^{15} \times 100A + 100A = 0$
$\Leftrightarrow 1{,}01^{15} \times 120\,000 = 100A\left(1{,}01^{15} - 1\right) \Leftrightarrow A = \dfrac{1{,}01^{15} \times 120\,000}{100\,(1{,}01^{15} - 1)} \approx 8654{,}85$
Mensualités $\approx \dfrac{8654{,}85}{12} \approx 721{,}24$.

▶ Exercice n°35

1.



Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{1}{5}\,(1 - p_n) = \dfrac{2}{15}p_n + \dfrac{1}{5}$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{p_{n+1} - \dfrac{3}{13}}{p_n - \dfrac{3}{13}} = \dfrac{\dfrac{2}{15}p_n + \dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{13}}{p_n - \dfrac{3}{13}} = \dfrac{\dfrac{2}{15}p_n - \dfrac{2}{65}}{p_n - \dfrac{3}{13}}$
$= \dfrac{\dfrac{2}{15}\left(p_n - \dfrac{3}{13}\right)}{p_n - \dfrac{3}{13}} = \dfrac{2}{15}$
(U_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{15}$ et de premier terme $U_1 = p_1 - \dfrac{3}{13} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{13} = \dfrac{7}{26}$.
3. Pour tout $n \geqslant 1$:
$U_n = q^{n-1} \times U_1 = \left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1} \times \dfrac{7}{26}$.
$p_n = U_n + \dfrac{3}{13} = \left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1} \times \dfrac{7}{26} + \dfrac{3}{13}$

▶ Exercice n°36

```
[0, 1, 1]
[0, 1, 1, 2]
[0, 1, 1, 2, 3]
[0, 1, 1, 2, 3, 5]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55]
```