Complément de géométrie analytique

▶ Exercice n°1

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times 6 + 3\times(-4) = -24$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \sqrt{2}\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{3}+2\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2+2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = a(a-2)+2\times 3a = a^2+4a$

▶ Exercice n°2

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3\times 5 + 10\times\frac{3}{2} = -15+15 = 0$, donc $\vec{u}\perp\vec{v}$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right) = \left(\sqrt{2}\right)-1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2^2$
   $= 2-1+3-4 = 0$, donc $\vec{u}\perp\vec{v}$

▶ Exercice n°3

1. $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 3(2-m)+5(-1+m) = 0$
   $\Leftrightarrow 6-3m-5+5m = 0 \Leftrightarrow 2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.
2. $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow m(m-3)+m-8 = 0 \Leftrightarrow m^2-2m-8 = 0$
   $\Delta = 36 > 0$; $m_1 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times 1} = -2$; $m_1 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times 1} = 4$.
   Il faut $m = -2$ ou $m = 4$.

▶ Exercice n°4

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} = 6\times(-4)+8\times 3 = -24+24 = 0.$

On a bien $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

$AB = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$ et $AC = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

aire $= \dfrac{AB\times AC}{2} = \dfrac{10\times 5}{2} = 25$.

▶ Exercice n°5

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$.

1. $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = 4$; $\vec{v}^2 = \|\vec{v}\|^2 = 9$.
2. $(2\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = 2\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}^2 = 8-2+1-9 = -2$
   $(\vec{u}+2\vec{v})^2 = \vec{u}^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}+4\vec{v}^2 = 4+4+36 = 44$
   $(-3\vec{u}+\vec{v})^2 = 9\vec{u}^2-6\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2 = 36-6+9 = 39$

▶ Exercice n°6

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}'\begin{pmatrix}-2\\-2\sqrt{3}\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3\times(-2)+\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3}) = 6-6 = 0$.
   d et d' sont perpendiculaires.
4. $\vec{n}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}'\begin{pmatrix}-2\sqrt{3}\\2\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°7

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in d' \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}\cdot\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x-5)+1\times(y+2) = 0$

$\Leftrightarrow 3x+y-13 = 0$. Une équation de d' est $3x+y-13 = 0$

▶ Exercice n°8

1.
   a) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 0$
   $\Leftrightarrow 2(x-2)+4(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x+4y+8 = 0$.
   Une équation de d_1 est $2x+4y+8 = 0$.

   b) $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x\\y+1\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = 0$
   $\Leftrightarrow 4x+2(y+1) = 0 \Leftrightarrow 4x+2y+2 = 0$.
   Une équation de d_2 est $4x+2y+2 = 0$.

   c) Les coordonnées de H vérifient le système :
   $$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}2x+4y=-8\\4x+2y=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1-2L_2\\2L_1-L_2\end{matrix}\left\{\begin{array}{l}-6x=-4\\6y=-14\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=\frac{2}{3}\\y=-\frac{7}{3}\end{array}\right..$$
   On a $H\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$

2.
   a) On a $\left\{\begin{array}{l}x_I = \dfrac{2+0}{2}\\y_I = \dfrac{-3-1}{2}\end{array}\right.$, donc $I\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
   $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\Delta_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-1\\y+2\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -2(x-1)+2(y+2)=0 \Leftrightarrow -2x+2y+6=0$.
Une équation de Δ_1 est $2x+2y+6=0$.

b) On a $\begin{cases} x_J = \dfrac{2-2}{0} \\ y_J = \dfrac{-3-5}{2} \end{cases}$, donc $J\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{JM}\begin{pmatrix} x \\ y+4 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow -4x-2(y+4)=0 \Leftrightarrow -4x-2y-8=0$.
Une équation de Δ_2 est $-4x-2y-8=0$.

c) Les coordonnées de Ω vérifient le système :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} -2x+2y=-6 \\ -4x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1+L_2 \\ 2L_1-L_2 \end{array}\begin{cases} -6x=2 \\ 6y=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{10}{3} \end{cases}.$$

On a $\Omega\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°9

1. On doit avoir $\begin{cases} 2x_H+y_H+2=0 \\ \overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H+3 \\ y_H+1 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$

($\vec{u}$ étant un vecteur directeur de d)
Cela donne le système :

$$\begin{cases} 2x_H+y_H+2=0 \\ -(x_H+3)+2(y_H+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} 2x_H+y_H=-2 \\ -x_H+2y_H=1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1-L_2 \\ L_1+2L_2 \end{array}\begin{cases} 5x_H=-5 \\ 5y_H=0 \end{cases}$. On a donc $H\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $AH=\sqrt{(x_H-x_A)^2+(y_H-y_A)^2}=\sqrt{(-1+3)^2+(0+1)^2}$
$=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

▶ Exercice n°10

1. Une équation de $\mathcal{C}_1$ est $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=\text{rayon}^2$, ce qui donne :
$(x+3)^2+(y-2)^2=16$
2. $\text{rayon}^2=IC^2=(x_C-x_I)^2+(y_C-y_I)^2=1^2+(-7)^2=50$.
Une équation de $\mathcal{C}_2$ est $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=\text{rayon}^2$, ce qui donne :
$(x-1)^2+(y-3)^2=50$
3. $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_3 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} -1-x \\ 1-y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} 2-x \\ -1-y \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow (-1-x)(2-x)+(1-y)(-1-y)=0$
$\Leftrightarrow -2+x-2x+x^2-1-y+y+y^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-3=0$
Une équation de $\mathcal{C}_3$ est $x^2+y^2-x-3=0$.

▶ Exercice n°11

1. $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow -3(x+1)+2(y-3)=0 \Leftrightarrow -3x+2y-9=0$
Une équation de la tangente T est $-3x+2y-9=0$.
2. $\text{rayon}^2=AB^2=(-3)^2+2^2=13$.
Une équation de $\mathcal{C}_2$ est $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=\text{rayon}^2$, ce qui donne :
$(x-2)^2+(y-1)^2=13$

▶ Exercice n°12

1. On peut remplacer x^2-4x par $(x-2)^2-4$ et y^2-4Y par $(y-2)^2-4$.
L'équation devient donc : $(x-2)^2-4+(y-2)^2-4+1=0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2$.
Ce qui est de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon $r=\sqrt{7}$.
2. On peut remplacer x^2-6x par $(x-3)^2-9$ et y^2+8y par $(y+4)^2-16$.
L'équation devient donc : $(x-3)^2-9+(y+4)^2-16+16=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-(-4))^2=3^2$.
Ce qui est de la forme $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2=r^2$. On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de rayon $r=3$.

▶ Exercice n°13

Cela revient à déterminer les couples (x,y) vérifiant le système (non linéaire) :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+2y+1=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(2x-1)^2-2x+2(2x-1)+1=0 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+4x^2-4x+1-2x+4x-2+1=0 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x^2-2x=0 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(5x-2)=0 \\ y=2x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ou } 5x-2=0 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{1}{5} \end{cases}$.

Comme on n'a pas procédé par équivalence, il faut vérifier si couples (x,y) trouvés sont bien solutions des équations initiales :

On a bien $\begin{cases} 0^2+(-1)^2-0-2+1=0 \\ 0+1-1=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} \frac{4}{25}+\frac{1}{25}-\frac{4}{5}-\frac{2}{5}+1=0 \\ \frac{4}{5}+\frac{1}{5}-1=0 \end{cases}$ Il y a donc deux points d'intersection de coordonnées $(0,-1)$ et $\left(\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)$.

► Exercice n°14

Dire que les deux droites sont perpendiculaires équivaut à dire que

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \cdot \vec{u}'\begin{pmatrix} 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1\times 1 + m\times m' = 0 \Leftrightarrow m\times m' = -1.$