Correction Entraînement en autonomie n°8 - Spé Maths 1re

► Exercice n°1

1. La suite (U_n) est arithmétique de raison $r = 20$ car on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours 20.
2. Le coût du creusement du 50ième correspond à U_{49} et $U_{49} = U_0 + 49\,r = 90 + 49 \times 20 = 1070$ euros.
3. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{49} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2} = 50 \times \dfrac{U_0 + U_{49}}{2} = 50 \times \dfrac{90 + 1070}{2} = 29000$ euros.
4. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $U_{n-1} = U_0 + (n-1)r = 90 + (n-1) \times 20 = 70 + 20n$.
5. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2} = n \times \dfrac{U_0 + U_n}{2} = n \times \dfrac{90 + 70 + 20n}{2}$
   $= n \times \dfrac{160 + 20n}{2} = n(80 + 10n) = 10n^2 + 80n$.
6. Cela revient à chercher l'entier n supérieur à 1 tel que $10n^2 + 80n = 56090 \Leftrightarrow 10n^2 + 80n - 56090 = 0$.
   $\Delta = 80^2 - 4 \times 10 \times (-56090) = 2250000$; $n_1 = \dfrac{-80 - 150}{20} = -79$ (impossible) ; $n_1 = \dfrac{-80 + 150}{20} = 71$.
   On peut atteindre 71 mètres.

► Exercice n°2

1. a) Pour tout entier positif n, $V_n > 0$ et on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1} + 5000}{U_n + 5000} = \dfrac{1{,}02U_n + 100 + 5000}{U_n + 5000} = \dfrac{1{,}02U_n + 5100}{U_n + 5000}$
   $= \dfrac{1{,}02\left(U_n + \frac{5000}{1{,}02}\right)}{U_n + 5000} = \dfrac{1{,}02\,(U_n + 5000)}{U_n + 5000} = 1{,}02$. La suite (V_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}02$ et de premier terme $V_0 = U_0 + 5000 = 23000$.
   b) Pour tout entier positif n, $V_n = q^n \times V_0 = 1{,}02^n \times 23000$.
   c) $V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1} = \text{premier terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q} = V_0 \times \dfrac{1 - 1{,}02^n}{1 - 1{,}02} = \dfrac{23000}{-0{,}02} \times (1 - 1{,}02^n)$
   $= -1150000 \times (1 - 1{,}02^n) = 1150000\,(1{,}02^n - 1)$.
2. Pour tout entier positif n, $U_n = V_n - 5000 = 1{,}02^n \times 23000 - 5000$.
3. Le salaire annuel en $2036 = U_{10} = 1{,}02^{10} \times 23000 - 5000 \approx 23036{,}87$.
4. $X = U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 - 5000 + V_1 - 5000 + \cdots + V_9 - 5000 = V_0 + V_1 + \cdots + V_9 - 5000 \times 10 = 1150000\left(1{,}02^{10} - 1\right) - 50000 \approx 201843{,}58$
5. Pour tout entier positif n, $U_{n+1} - U_n = 1{,}02^{n+1} \times 23000 - 5000 - (1{,}02^n \times 23000 - 5000)$
   $= 1{,}02^{n+1} \times 23000 - 5000 - 1{,}02^n \times 23000 + 5000 = 1{,}02^n \times 23000 \times (1{,}02 - 1) = 1{,}02^n \times 460$
   $U_{n+1} - U_n$ reste toujours positif, donc (U_n) est bien croissante.
6.
```
annee=2026
U=18000
while U<=24000 :
  U=1.02*U+100
  annee=annee+1
print(annee)
```