Correction Entraînement en autonomie n°5 - Spé Maths 1^re^

▶ Exercice n°1

1. a) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 10 \\ y-5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x - 10(y-5) = 0 \Leftrightarrow -5x - 10y + 50 = 0$. Une équation de (BA) est $-5x - 10y + 50 = 0$ (ou $-x - 2y + 10 = 0$ ou toute équation équivalente)

   b) $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 10x - 5y = 0$.
   Une équation de $\mathcal{D}$ est $10x - 5y = 0$ (ou $2x - y = 0$ ou toute équation équivalente)

   c) $H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} -5x - 10y + 50 = 0 \\ 10x - 5y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 - 2L_2 \\ 2L_1 + L_2 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} -25x + 50 = 0 \\ -25y + 100 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \end{array} \right.$.
   On a donc $H\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   d) $OH = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

2. a) $I\begin{pmatrix} \dfrac{x_O + x_H}{2} \\ \dfrac{y_O + y_H}{2} \end{pmatrix} = I\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{CH}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = -9 \times 2 + 2 \times 9 = 0$. La droite (AI) est perpendiculaire à la droite (CH).

3. $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 10 - x \\ -y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x(10-x) + (-y)(-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x = 0$
   Une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 - 10x = 0$.

4. a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$.
   $\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $I\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{5}$.

   b) I est le milieu de $[OH]$ et $OH = 2\sqrt{5}$: on en déduit que $IH = \sqrt{5}$ et donc que H est sur $\mathcal{C}'$.
   On sait que (BA) est perpendiculaire à (OH) et donc à (IH) aussi. Ainsi on peut en déduire que la tangente à $\mathcal{C}'$ passant par H est la droite (BA) qui admet comme équation cartésienne $-5x - 10y + 50 = 0$.