Suites numériques

▶ **Exercice n°1**
Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{2n}{n+3}$.

1. Calculer U_0, U_3 et U_{n+1}.
2. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il permette de calculer U_n après avoir entré n.

```
n=int(input("n=?"))
U=.........
print(U)
```

▶ **Exercice n°2**
Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon explicite.

```
n=int(input("n=?"))
U=n/(n+1)
print(U)
```

1. Déterminer U_n en fonction de n.
2. Calculer U_9 et U_{n+1}.

▶ **Exercice n°3**
Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = 5 - 3U_n$ et $U_0 = 1$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il permette de calculer U_n après avoir entré n.

```
U=.........
n=int(input("n=?"))
for i in range(n):
  U=.........
print(U)
```

▶ **Exercice n°4**
Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
U=2
n=int(input("n=?"))
for i in range(n):
  U=4*U-3
print(U)
```

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
2. Calculer U_1 et U_2.

▶ **Exercice n°5**
(U_n) est la suite telle que $U_0 = 1$; $U_1 = \dfrac{1}{2}$; $U_2 = \dfrac{1}{3}$; $U_3 = \dfrac{1}{4}$; $U_4 = \dfrac{1}{5}$ ...
Déterminer une formule qui donne U_n directement en fonction de n.

▶ **Exercice n°6**
(U_n) est la suite telle que $U_0 = 1$; $U_1 = 2$; $U_2 = 5$; $U_3 = 10$; $U_4 = 17$ ...
Déterminer une formule qui donne U_n directement en fonction de n.

▶ **Exercice n°7**
(U_n) est la suite telle que $U_0 = -5$; $U_1 = 7$; $U_2 = 19$; $U_3 = 31$; $U_4 = 43$ ...
Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

▶ **Exercice n°8**
(U_n) est la suite telle que $U_0 = \dfrac{1}{2}$; $U_1 = -\dfrac{1}{4}$; $U_2 = \dfrac{1}{8}$; $U_3 = -\dfrac{1}{16}$; $U_4 = \dfrac{1}{32}$ ...
Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

▶ **Exercice n°9**
Calculer, pour tout n, $U_{n+1} - U_n$ et donner le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = 3 - 7n$
2. $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = U_n - \dfrac{1}{n+1}$

▶ **Exercice n°10**
Calculer, pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et donner le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = \dfrac{2^n}{5}$
2. $U_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$

▶ **Exercice n°11**
En utilisant les variations d'une fonction, étudier le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = n + n^2$
2. $U_n = \dfrac{1-n}{n+2}$

▶ **Exercice n°12**
En choisissant la méthode qui parait la plus adaptée, étudier le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = 2 \times 5^n$
2. $U_n = (-3)^n$
3. $U_0 = -4$ et $U_{n+1} = U_n - (U_n)^2$
4. $U_n = n^3$

▶ **Exercice n°13**
Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 5$.

1. Calculer U_2 et U_{13}.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ **Exercice n°14**
Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ telle que $U_4 = 25$. Calculer U_7 et U_0.

▶ **Exercice n°15**
Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$. Calculer sa raison r et son premier terme U_0.

▶ **Exercice n°16**
Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_2+U_3+U_4 = 15$ et $U_6 = 20$. Déterminer U_0 et la raison r.

▶ **Exercice n°17**
Déterminer si la suite (U_n) est arithmétique ou non dans les cas suivants :

1. $U_n = 2n - 3$
2. $U_n = n^2$

▶ **Exercice n°18**
On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts simples** (autrement dit, chaque année, on reçoit les mêmes intérêts égaux à 3 % du capital **initial**).
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans.

▶ **Exercice n°19**
Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = 2$ telle que $U_0 = 1$.
Calculer $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$ et $U_{20} + U_{21} + \cdots + U_{43}$.

▶ **Exercice n°20**
Existe-t'il un entier $n > 3$ tel que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = 276$?

▶ **Exercice n°21**
Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer U_2 et U_5.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ **Exercice n°22**
Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 32$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer U_3 et U_6.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ **Exercice n°23**
Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 3$ telle que $U_4 = 81$.
Calculer U_0, puis U_7.

▶ **Exercice n°24**
Pour quelles valeurs de q la suite géométrique (U_n) de raison q vérifie t'elle $2U_2 = 3U_1 - U_0$ (avec $U_0 \neq 0$) ?

▶ **Exercice n°25**
Déterminer si la suite (U_n) est géométrique ou non dans les cas suivants :

1. $U_n = -4 \times 5^n$.
2. $U_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

▶ **Exercice n°26**
Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20 % de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée.
On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.

1. Justifier que la suite (I_n) est géométrique et donner sa raison.

2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques.
4. On cherche à déterminer à l'aide d'un script le plus petit nombre de plaques que le rayon lumineux doit franchir pour que son intensité devienne inférieure à 1 cd. Compléter la 3e ligne du script python ci-dessous pour qu'il réponde à la question.

```
n=0
I=50
while ...... :
  I=0.8*I
  n=n+1
print(n)
```

▶ Exercice n°27

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec **intérêts composés** (autrement dit, chaque année, on reçoit des intérêts égaux à 3 % du capital de **l'année précédente**).
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.

▶ Exercice n°28

La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante).
On note U_0 la masse initiale de l'élément radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration.

1. Justifier que la suite (U_n) est géométrique et donner sa raison.
2. La période de désintégration du radium est de 1500 ans et on considère un échantillon de 5 g de radium.
   On note $U_0 = 5$ et U_n la masse de l'échantillon au bout de n périodes de désintégration.
   a) Exprimer U_n en fonction de n.
   b) Calculer ce que sera la masse de l'échantillon dans 10500 ans.

▶ Exercice n°29

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 2$ telle que $U_0 = 1$.
Calculer $U_0 + U_1 + \cdots + U_{12}$ et $U_2 + U_3 + \cdots + U_{15}$.

▶ Exercice n°30

Un salarié a reçu deux propositions de salaire.

1. **Proposition 1 :** La première année, un salaire annuel de 20000 euros puis chaque année une augmentation fixe de 450 euros.
   On pose $U_0 = 20000$, U_1 le salaire au bout d'un an, ..., U_n le salaire au bout de n années.
   Préciser si (U_n) est arithmétique ou géométrique et exprimer U_n en fonction de n.
2. **Proposition 2 :** La première année, un salaire annuel de 19900 euros puis chaque année une augmentation de 2%.
   On pose $V_0 = 19900$, V_1 le salaire au bout d'un an, ..., V_n le salaire au bout de n années.
   Préciser si (V_n) est arithmétique ou géométrique et exprimer V_n en fonction de n.
3. On cherche à écrire un script qui précise la proposition donnant le meilleur salaire annuel pour les 20 prochaines années. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il réponde à la question.

```
for n in range(20):
  U=.................
  V=.................
  if ........:
    print("Pour n=",n," la proposition 1 est la meilleure")
  else:
    print("Pour n=",n," la proposition 2 est la meilleure")
```

▶ Exercice n°31

Le script python ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
U=25
n=int(input("n? "))
for i in range(n):
  U=0.9*U+2
print(U)
```

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et donner la valeur de U_0.
2. Calculer U_1 et U_2.
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 20$.

a) Calculer V_0, V_1 et V_2.
b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
c) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.

4. Calculer U_{10}.
5. Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$. En déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$

▶ Exercice n°32

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons.
Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2 % par semaine et pour compenser cette évaporation, on ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau .
On note $U_0 = 280$, le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium et ,pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note U_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0{,}98U_n + 5$.
2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 250$.
   a) Justifier que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme V_0.
   b) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
3. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau. Justifier que cette préconisation est respectée.

▶ Exercice n°33

Au 1er janvier 2024, la même entreprise comptait 1500 employés. Il est prévu que, pour toutes les années à venir, 20% de l'effectif au premier janvier partira à la retraite durant l'année et que pour ajuster ses effectifs, l'entreprise embauchera 200 jeunes dans l'année.
On note U_n, le nombre d'employés au premier janvier de l'année $2024 + n$. On a ainsi $U_0 = 1500$.

1. Expliquer pourquoi on peut affirmer que, pour tout entier positif n, $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n + 200$.
2. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1000$ est une suite géométrique de raison 0,8 dont on précisera le premier terme V_0.
3. Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que, pour tout entier positif n, on a $U_n = 500 \times 0{,}8^n + 1000$.
4. Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
5. Compléter le script python ci-dessous pour qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'entreprise comptera moins de 1150 employés au premier janvier.

```
annee=2024
U=1500
while ...... :
  U=......
  annee=annee+1
print(annee)
```

▶ Exercice n°34

Un emprunteur contracte auprès d'une banque un prêt d'un montant de 120 000 euros au taux annuel de 1 %. On note :

- $U_0 = 120\,000$, le capital emprunté ;
- A, l'annuité que doit rembourser chaque année l'emprunteur (qui dépend de la durée de remboursement et que l'on va chercher à déterminer) ;
- U_n, le capital qui reste à rembourser au bout de n années.

Quand on emprunte au taux de 1 %, la banque considère qu'elle doit recevoir, en plus de l'annuité de remboursement, des intérêts annuels égaux à 1 % de la somme qui reste à rembourser. Ces intérêts s'ajoutent au capital que doit rembourser l'emprunteur.
On a ainsi, pour tout entier positif n, $U_{n+1} = U_n - A + \frac{1}{100}U_n$.
La suite (U_n) est donc définie par $U_0 = 120\,000$ et $U_{n+1} = 1{,}01U_n - A$.

1. Justifier que (V_n) définie par $V_n = U_n - 100A$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme V_0.
2. En déduire V_n, puis U_n en fonction de n et de A.
3. Déterminer A pour que le prêt soit remboursé en 15 ans, c'est à dire que $U_{15} = 0$.
   En déduire les mensualités que doit payer l'emprunteur à sa banque.

▶ Exercice n°35

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle l'atteigne au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle la manque au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$.
On suppose qu'au 1er lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer. Pour tout entier $n > 0$, on note A_n l'événement « Alice atteint la cible au n-ième coup » et B_n l'événement « Alice rate la cible au n-ième coup ».
On pose $p_n = p(A_n)$.

1. A l'aide d'un arbre pondéré, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = \dfrac{2}{15}p_n + \dfrac{1}{5}$.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $U_n = p_n - \dfrac{3}{13}$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme U_1.
3. En déduire U_n, puis p_n en fonction de n.

► Exercice n°36

En langage python, on peut affecter à une variable une liste de nombres en les encadrant par des crochets et en les séparant par des virgules. Exemple : `U=[1,3,5,7]`

On peut accéder à chaque élément de la liste de la façon suivante :

- le premier élément de la liste est `U[0]`
- le deuxième élément de la liste est `U[1]`
- etc.

Pour ajouter un nombre `x` à la liste `U` , on utilise l'instruction `U.append(x)`.

On considère le script suivant :

```
U=[0,1]
n=2
while (n<=10):
  U.append(U[n-1]+U[n-2])
  print(U)
  n=n+1
```

On donne ci-dessous un extrait de ce qu'affiche ce script. Compléter les termes manquants :

```
[0, 1, 1]
[0, 1, 1, 2]
[0, 1, 1, 2, 3]
[0, 1, 1, 2, 3, 5]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, ......]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, ......, ......]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, ......, ......, ......]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, ......, ......, ......, ......]
[0, 1, 1, 2, 3, 5, ......, ......, ......, ......, ......]
```

Note : ce script affiche en fait les premiers termes de la suite de Fibonacci définie par $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$.