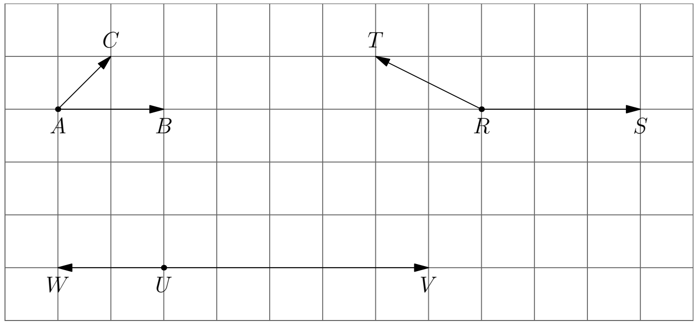
Complément sur le produit scalaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

▶ Exercice n°1

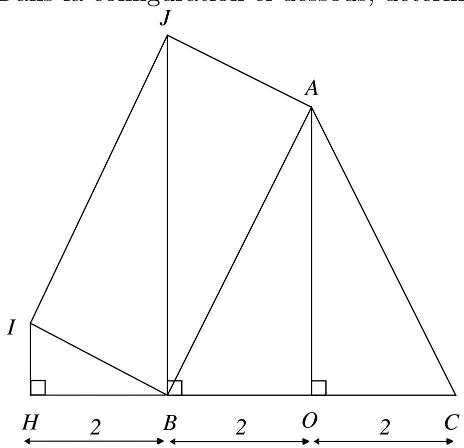
Dans la configuration ci-dessous où un carreau représente une unité de longueur, déterminer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2.** $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT}$ **3.** $\overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{UW}$



▶ Exercice n°2

Dans la configuration ci-dessous, déterminer les produits scalaires suivants :

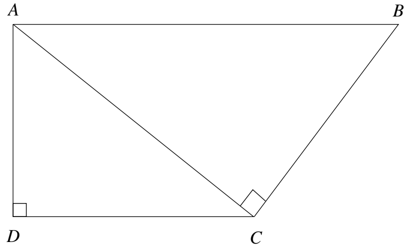


1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **2.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC}$ **3.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ}$
4. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA}$ **5.** $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$ **6.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI}$

▶ Exercice n°3

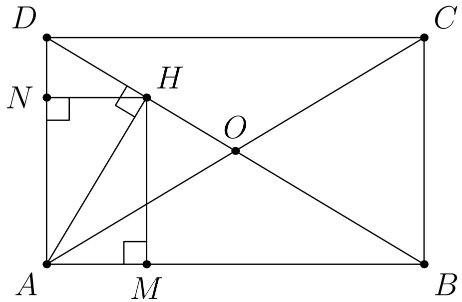
Dans la figure ci-dessous : $ABCD$ est un trapèze rectangle et $(AC) \perp (BC)$.

En exprimant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, montrer que $AC^2 = AB \times CD$.



▶ Exercice n°4

Dans la configuration ci-dessous, $ABCD$ est un rectangle de centre O, H est le projeté orthogonal de A sur (BD) et le point H se projette orthogonalement en M sur (AB) et en N sur (AD).



1. Justifier que les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ sont égaux.
2. Justifier, de même, que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HA}$.
3. En déduire que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{NM} = 0$.
4. Montrer qu'on peut en conclure que les droites (AC) et (NM) sont perpendiculaires.

▶ Exercice n°5

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :

1. $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 7$, $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$
2. $\|\vec{u}\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$, $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$
3. $\|\vec{u}\| = 4$,$\|\vec{v}\| = \dfrac{3}{2}$, $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$

▶ Exercice n°6

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
Calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$ et en déduire les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

▶ Exercice n°7

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

Calculer $\cos(\vec{u},\vec{v})$ et en déduire les mesures principales possibles de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$.

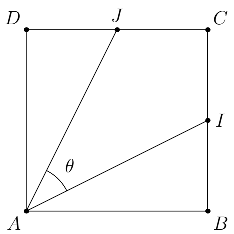
▶ Exercice n°8

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Calculer $\cos\widehat{BAC}$ et en déduire la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

▶ Exercice n°9

Dans la figure ci-dessous $ABCD$ est un carré de côté 2, I est le milieu de $[BC]$, J est le milieu de $[DC]$ et on note θ une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.

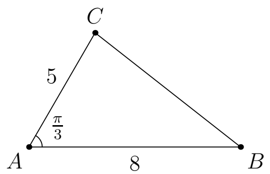


On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.
2. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ et la valeur de $\cos\theta$.

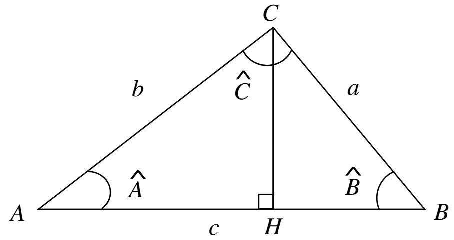
▶ Exercice n°10

En utilisant le Théorème d'Al-Kashi, déterminer la valeur de BC dans la configuration suivante :

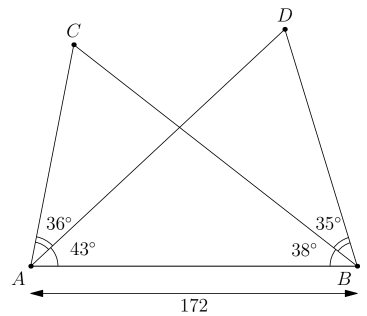


▶ Exercice n°11

Dans le triangle ABC ci-dessous, on note H le pied de la hauteur issue de C et S l'aire du triangle.



1. Exprimer CH en fonction de b et de $\sin\widehat{A}$. En déduire que $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
2. Montrer que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{abc}{2S}$. En déduire que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$.
3. Quelle est la mesure des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ si on a $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$.
4. On considère la configuration ci-dessous :



   a) En considérant le triangle ACB, compléter l'égalité $\dfrac{AC}{\sin\ldots\ldots} = \dfrac{172}{\sin\ldots\ldots}$.
   En déduire la distance AC.

   b) En considérant le triangle ADB, compléter l'égalité $\dfrac{AD}{\sin\ldots\ldots} = \dfrac{172}{\sin\ldots\ldots}$.
   En déduire la distance AD.

   c) En utilisant le Théorème d'Al-Kashi dans le triangle ACD, déterminer la distance CD.

▶ Exercice n°12

La condition « $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraire » est-elle nécessaire et/ou suffisante pour que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leqslant 0$?