Kit de survie : première partie

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

Pour tout a :	$x<y \Leftrightarrow x+a<y+a$	*même sens*
Pour tout $k>0$:	$x<y \Rightarrow kx<ky$	*même sens*
Pour tout $k<0$:	$x<y \Rightarrow kx>ky$	*sens contraire*
Pour x et y de même signe :	$x<y \Rightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$	*sens contraire*
Pour $x>0$ et $y>0$:	$x<y \Rightarrow x^2<y^2$	*même sens*
Pour $x>0$ et $y>0$:	$x<y \Rightarrow \sqrt{x}<\sqrt{y}$	*même sens*
Si f croissante * :	$x<y \Rightarrow f(x)\leqslant f(y)$	*même sens*
Si f décroissante * :	$x<y \Rightarrow f(x)\geqslant f(y)$	*sens contraire*

(* sur un intervalle contenant x et y)

► *Exemple :*

• Sachant que $3<x<5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$$3<x<5 \Rightarrow -5<-x<-3 \Rightarrow -2<3-x<0 \Rightarrow \frac{1}{3-x}<-\frac{1}{2}$$

b) Inégalités classiques

Pour tout x :

$-1\leqslant \cos x\leqslant 1$

$-1\leqslant \sin x\leqslant 1.$

c) Signe de $ax+b$ $\quad(a\neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

d) Signe de ax^2+bx+c $\quad(a\neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta=b^2-4ac$ (sauf cas évidents)

• Si $\Delta<0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	

• Si $\Delta=0$, on calcule la racine double : $x_1=-\dfrac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x=x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

• Si $\Delta>0$, on calcule les deux racines : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

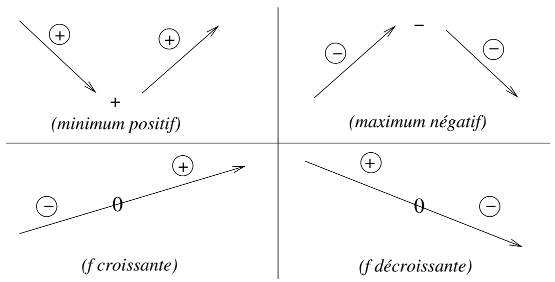
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1<x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2) Étude de fonction

a) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to l'}\to l+l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\to -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to l'}\to l\times l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\to -\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\to +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}\to -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to l\neq 0}}\right)\to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}}\right)\to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^+}}\right)\to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^-}}\right)\to -\infty$

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\ \ )}{(\ \ )}=(\ \ \ )\times\dfrac{1}{(\ \ )}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite)*.

b) Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ alors la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à C_f.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ alors la droite d'équation $y=b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

c) Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :
• si $f(x)-g(x)\geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
• si $f(x)-g(x)\leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

d) Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x)=a\Rightarrow f'(x)=0$	$f(x)=ax+b\Rightarrow f'(x)=a$	$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$
$f(x)=x^2\Rightarrow f'(x)=2x$	$f(x)=x^3\Rightarrow f'(x)=3x^2$	$f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}$	$f(x)=\dfrac{1}{x^3}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{x^4}$	$f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$	$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$	

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$k\,f\quad (k$ réel$)$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g+f\,g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g-f\,g'}{g^2}$

e) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$
(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$.

3) Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$	
$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin(ax+b) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x) = \cos x \times \sin x \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\sin x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x) \neq 0)$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3}$ $(U(x) \neq 0)$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x) = \dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :* Soit f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(3x+6)^2}$.

On pense à la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $\dfrac{-1}{U}$) . On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{\dfrac{3}{(3x+6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-1}{(3x+6)}$.