

# Primitives

## ► Exercice n°1

Déterminer les primitives de  $f$  sur  $I$  dans les cas suivants :

1.  $f(x) = 3x - 4$   $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$   $I = \mathbb{R}$
3.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \frac{1}{3}$   $I = \mathbb{R}$
4.  $f(x) = -\frac{2}{x^2}$   $I = ]0; +\infty[$
5.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$   $I = ]0; +\infty[$
6.  $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$   $I = \mathbb{R}$
7.  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$   $I = \mathbb{R}$
8.  $f(x) = 5(5x - 1)^3$   $I = \mathbb{R}$
9.  $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$   $I = \mathbb{R}$
10.  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})^2$   $I = ]0; +\infty[$

## ► Exercice n°2

Déterminer les primitives de  $f$  sur  $I$  dans les cas suivants :

1.  $f(x) = (2x - 1)^3$   $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^2}$   $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$
3.  $f(x) = x(2x^2 + 1)^3$   $I = \mathbb{R}$
4.  $f(x) = \frac{1}{(2x - 3)^2}$   $I = \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$
5.  $f(x) = \frac{\cos x}{(5 + 4 \sin x)^2}$   $I = \mathbb{R}$
6.  $f(x) = \frac{12}{(3x - 2)^2}$   $I = \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$
7.  $f(x) = \sin x (\cos x)^2$   $I = \mathbb{R}$

## ► Exercice n°3

Déterminer  $F$ , la primitive de  $f$  sur  $I$  vérifiant la condition donnée, dans les cas suivants :

1.  $f(x) = \frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$   $F(0) = 1$   $I = \mathbb{R}$
2.  $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x + 1)^2}$   $F(2) = 0$   $I = ]1; +\infty[$

## ► Exercice n°4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{2x^2 - 8x}{(x - 2)^2}$ .

1. Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) = a + \frac{b}{(x - 2)^2}$ , pour tout  $x$  de  $]2; +\infty[$ .
2. En déduire  $F$ , la primitive de  $f$  sur  $]2; +\infty[$  telle que  $F(3) = 1$ .

---

*Rappels de trigonométrie pour l'exercice 6 :*

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & ; & & \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(2a) &= (\cos a)^2 - (\sin a)^2 = 2(\cos a)^2 - 1 = 1 - 2(\sin a)^2 \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & ; & & \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a\end{aligned}$$

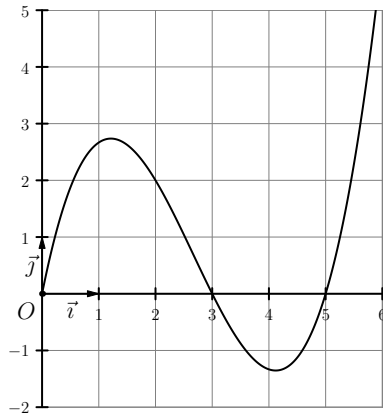
---

## ► Exercice n°5

1. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (\cos x)^3$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $x$ ,  $f(x) = \cos x - \cos x (\sin x)^2$ .
  - b) En déduire une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (\sin x)^3$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $x$ ,  $g(x) = \sin x - \sin x (\cos x)^2$ .
  - b) En déduire une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = (\cos x)^2$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $x$ ,  $h(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ .
  - b) En déduire une primitive de  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - c) En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $i$  définie par  $i(x) = (\sin x)^2$ .

► **Exercice n°6**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $[0; 6]$  dont la courbe est donnée ci-dessous :

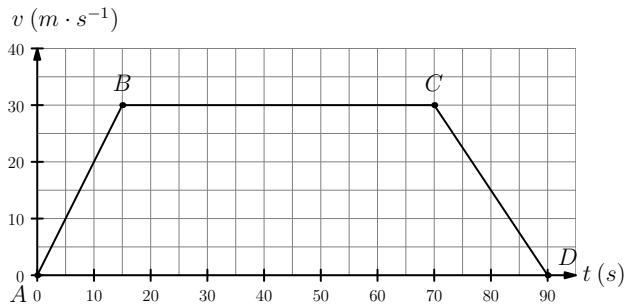


On note  $F$  la primitive de  $f$  sur  $[0; 6]$  telle que  $F(2) = 3$ .

1. Déterminer  $F'(0)$ ,  $F'(2)$  et  $F'(3)$ .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la primitive  $F$  au point d'abscisse 2.
3. Déterminer le tableau de variations de  $F$ .

► **Exercice n°7**

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse  $v$  (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps  $t$  (en secondes).



1. On note  $d$  la fonction qui donne la distance parcourue (en mètres) en fonction du temps  $t$ . On rappelle que la fonction vitesse  $v$  est la dérivée de la fonction distance  $d$ . Compléter la phrase suivante :  
Si  $v(t) = d'(t)$  alors on peut dire que la fonction ..... est une primitive de la fonction .....

2. Mouvement entre 0 et 15 secondes :
  - a) En déterminant une équation de la droite  $(AB)$ , déterminer l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $t$  pour  $t$  compris entre 0 et 15 secondes.
  - b) En déduire  $d(t)$  pour  $t$  compris entre 0 et 15 secondes.
  - c) Quelle est la distance parcourue au bout de 15 secondes ?
3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :
  - a) Quelle est l'expression de  $v(t)$  entre 15 et 70 secondes ?  
En déduire  $d(t)$  pour  $t$  compris entre 15 et 70 secondes.
  - b) Quelle est la distance parcourue au bout de 70 secondes ?
4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :
  - a) En déterminant une équation de la droite  $(CD)$ , déterminer l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $t$  pour  $t$  compris entre 70 et 90 secondes.
  - b) En déduire  $d(t)$  pour  $t$  compris entre 70 et 90 secondes.
  - c) Quelle est la distance parcourue au bout des 90 secondes ?

Remarque :

- Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;
- Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;
- Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

► **Exercice n°8**

Pour un condensateur parfait de capacité  $C$  (en farads), l'intensité  $i(t)$  (en ampères) et la tension (en volts) sont liés par la relation :

$$i(t) = C \times \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow i(t) = C \times u'(t)$$

On admet que  $C = 10^{-6}$  F,  $i(t) = 0,00314 \times \sin(6280t)$  et  $u(0) = -0,5$  V.  
Déterminer  $u(t)$  en fonction de  $t$ .

► **Exercice n°9**

Soit  $g$  et  $h$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

On considère les deux propositions suivantes :

- Proposition A : « Pour tout  $x$  de  $I$ ,  $g'(x) = h(x)$  »
- Proposition B : «  $g$  est une primitive de  $h$  sur  $I$  »

1. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ?
2. Exprimer la négation de la proposition A.