Limites d'une fonction

► Exercice n°1
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$)

1. $f(x) = x + \sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$
5. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2x - 3$
7. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + \frac{1}{x^2}}$

► Exercice n°2
Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$)

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - x$
2. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{\frac{1}{x} - 2}$
5. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2} + 3}{x - 1}$

► Exercice n°3
Déterminer la limite en a (pour $x < a$ et pour $x > a$) de la fonction f dans les cas suivants : *(on précisera si la courbe de f admet une asymptote verticale)*

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\quad a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3$ $\quad a = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{4x} + 3$ $\quad a = 0$
4. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$ $\quad a = -2$
5. $f(x) = \dfrac{2}{3x-4}$ $\quad a = \dfrac{4}{3}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{1-x^2}$ $\quad a = 1$

► Exercice n°4
Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction polynôme f dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
2. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$
3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

► Exercice n°5
Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction rationnelle f dans les cas suivants : *(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ ou en $+\infty$)*

1. $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{-4x+1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{-x^3+2x^2-2}$
5. $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1}$

▶ Exercice n°6

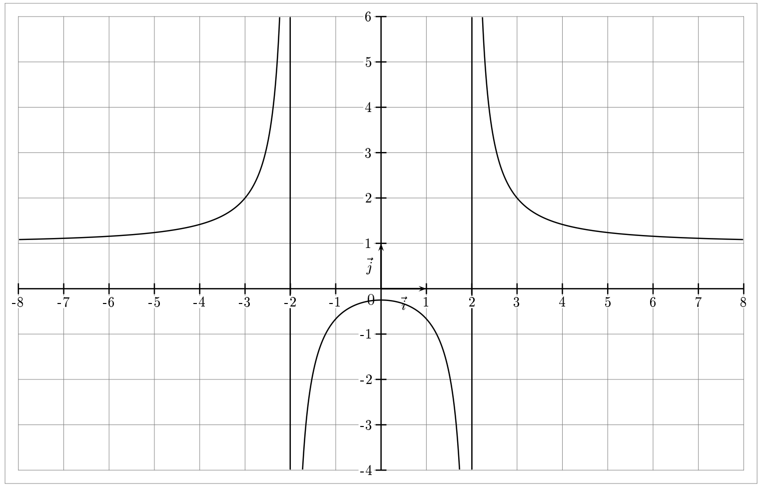
Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

1. Étudier les limites de fi en $-\infty$, en $1 \quad (x<1)$, en $1 \quad (x>1)$ et en $+\infty$.
2. Étudier la position relative entre la courbe de f et l'asymptote horizontale sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

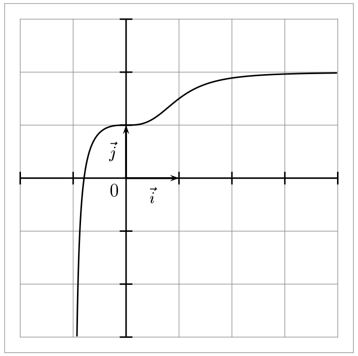
▶ Exercice n°7

Dans chacun des cas suivants, déterminer d'après la courbe les limites de la fonction f aux bornes et une équation de chacune des asymptotes.

a)



b)



▶ Exercice n°8

Compléter les phrases suivantes par « $\lim\limits_{x\to\cdots}\cdots=\cdots$ », « $x=\cdots$ », « $y=\cdots$ », « verticale », « horizontale » ou « oblique ».

1. Si $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=-\infty$ alors la droite d'équation .... est une asymptote .... à C_f .
2. Si .... alors la droite d'équation $y=5$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

▶ Exercice n°9

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right)^2$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})^3$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-4+\dfrac{1}{x}\right)^3$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}}\dfrac{\sqrt{x}}{(x-3)^2}$

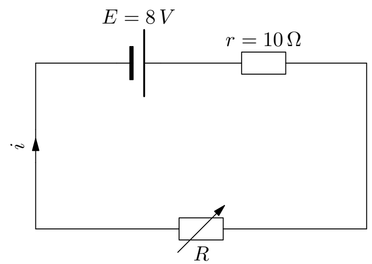
▶ Exercice n°10

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? *(justifier sa réponse)*

« Si f est une fonction strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ alors on a nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ »

▶ Exercice n°11

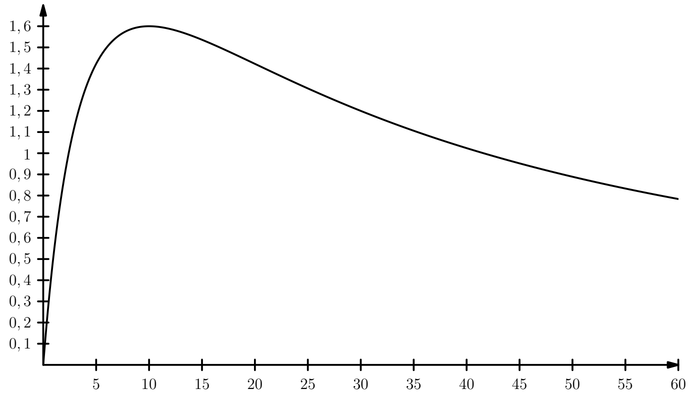
On considère le circuit ci-dessous dans lequel R est variable.



La puissance dissipée (en watts) dans le résistor de résistance R est :

$$P(R)=\frac{E^2\times R}{(R+r)^2}=\frac{64\times R}{(R+10)^2}$$

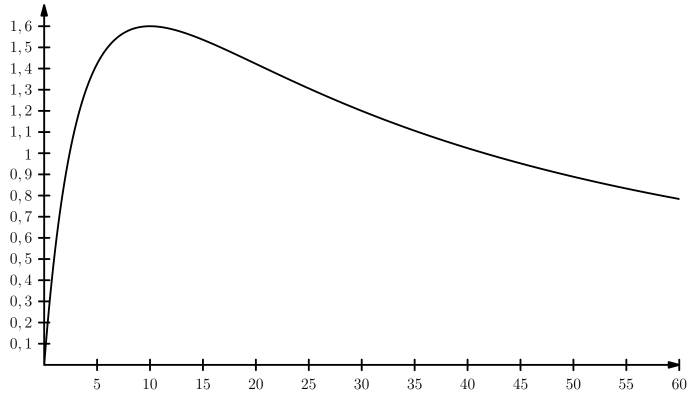
La courbe représentant P (en ordonnée) en fonction de R en (abscisse) est donnée ci-dessous :



1. Déterminer, par le calcul, la valeur de P quand $R = 10\,\Omega$.
2. Le graphique permet-il d'établir une conjecture viable sur la valeur vers laquelle tend P quand R devient très grand ?
3. Déterminer la limite de P quand R tend vers $+\infty$.
4. On cherche à déterminer, à l'aide d'un algorithme, la première valeur entière de R ($R \geqslant 10$) pour laquelle la puissance P devient inférieure à 1 W.
   Pour cela, on part de $R = 10$ et on augmente R de 1 tant que cela est nécessaire. Compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```
 1: DEBUT_ALGORITHME
 2:   R ← 10
 3:   P ← .......
 4:   TANT_QUE (P........) FAIRE
 5:     DEBUT_TANT_QUE
 6:     R ← R+1
 7:     P ← P(R)
 8:     FIN_TANT_QUE
 9:   AFFICHER R
10: FIN_ALGORITHME
```

La courbe représentant P (en ordonnée) en fonction de R en (abscisse) est donnée ci-dessous :



1. Déterminer, par le calcul, la valeur de P quand $R = 10\,\Omega$.
2. Le graphique permet-il d'établir une conjecture viable sur la valeur vers laquelle tend P quand R devient très grand ?
3. Déterminer la limite de P quand R tend vers $+\infty$.
4. On cherche à déterminer, à l'aide d'un algorithme, la première valeur entière de R ($R \geqslant 10$) pour laquelle la puissance P devient inférieure à 1 W.
   Pour cela, on part de $R = 10$ et on augmente R de 1 tant que cela est nécessaire. Compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```
 1: DEBUT_ALGORITHME
 2:   R ← 10
 3:   P ← .......
 4:   TANT_QUE (P........) FAIRE
 5:     DEBUT_TANT_QUE
 6:     R ← R+1
 7:     P ← P(R)
 8:     FIN_TANT_QUE
 9:   AFFICHER R
10: FIN_ALGORITHME
```