Intégration

▶ Exercice n°1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 x^2+1\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 1+\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^5 \frac{2}{2x-1}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_2^3 x+\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+3)^2}\,\mathrm{d}x$
7. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}(\ln x)\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^1 2x\mathrm{e}^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} 6\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t)+2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,(\sin t)^2\,\mathrm{d}t$

▶ Exercice n°2

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x)=x\ln x$ est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f définie par $f(x)=1+\ln x$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

▶ Exercice n°3

1. Montrer que la fonction F définie par $F(t)=(-2t-3)\,\mathrm{e}^{-t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t)=(2t+1)\,\mathrm{e}^{-t}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$

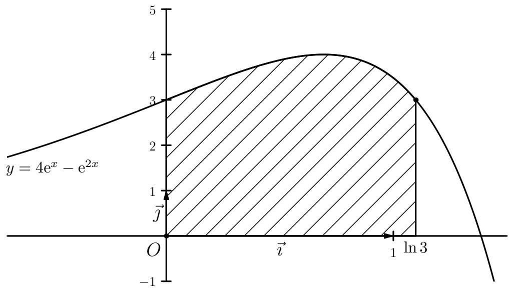
▶ Exercice n°4

Soient f et g définies sur $[3\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

1. Calculer les intégrales $I=\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_3^5 g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Vérifier que, pour tout $x\geqslant 3$, on a $\dfrac{5x-1}{x^2-x-2}=3f(x)+2g(x)$.
3. En déduire $\displaystyle\int_3^5 \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,\mathrm{d}x$.

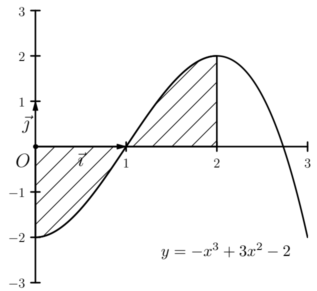
▶ Exercice n°5

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



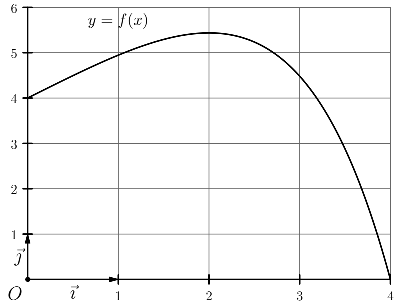
▶ Exercice n°6

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



▶ Exercice n°7

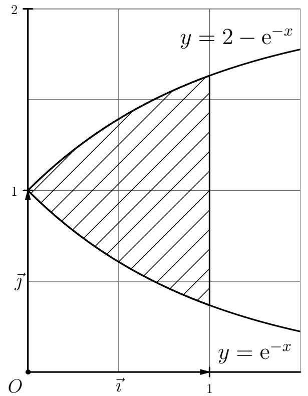
La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0,2]$ est donnée ci-dessous :



1. Justifier, d'après le graphique, que $8 \leqslant \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 12$.
2. Déterminer, d'après le graphique, un encadrement de $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

▶ Exercice n°8

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



▶ Exercice n°9

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

On note C_f la courbe représentative de f et D la droite d'équation $y = 2$ dans repère orthonormé d'unité 2 cm.

1. Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D sur $]-1\,;\,+\infty[$.
2. Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par la courbe C_f, la droite D et par les droites d'équation $x = 0$ et $x = 5$.

▶ Exercice n°10

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x}$.

Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = x$.

1. Étudier la position relative de C_f et D sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par la courbe C_f, la droite D et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

▶ Exercice n°11

Calculer la valeur moyenne sur $[0\,;\,\mathrm{e} - 1]$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

▶ Exercice n°12

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ (t en secondes).

Calculer la vitesse moyenne de l'objet (la valeur moyenne de la fonction « vitesse ») entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.

▶ Exercice n°13

L'intensité d'un courant alternatif est définie par $I(t) = I_{\max}\sin(\omega t)$ et sa période est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Montrer que l'intensité moyenne (la valeur moyenne de la fonction « intensité ») sur une demi-période est égale à $\dfrac{2I_{\max}}{\pi}$.

▶ Exercice n°14

La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale d'un fleuve soit inférieur à a mètres est égale à $P(a) = \displaystyle\int_0^a 0{,}4x\,\mathrm{e}^{-0{,}2x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer $P(a)$ en fonction de a.
2. En déduire la valeur de a pour laquelle $P(a) = 0{,}99$.