Géométrie-Trigonométrie-Complexes

▶ Exercice n°1

Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ sachant que $\|\overrightarrow{u}\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.

▶ Exercice n°2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

▶ Exercice n°3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ avec $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

▶ Exercice n°4

En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

▶ Exercice n°5

Déterminer les réels A et B tels que, pour tout réel x :

$2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.

▶ Exercice n°6

Déterminer les réels A et B tels que, pour tout réel x :

$2\sqrt{2}\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$.

▶ Exercice n°7

Déterminer le réel φ tel que, pour tout réel x :

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x) - \dfrac{1}{2}\sin(2x) = \cos(2x+\varphi)$

▶ Exercice n°8

Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$
2. $(3+\mathrm{i})(-4+2\mathrm{i})$
3. $(2+\mathrm{i})^2$
4. $(\sqrt{2}-\mathrm{i})^2$
5. $-\dfrac{3}{\mathrm{i}}$
6. $\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$
7. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$
8. $\overline{1+\mathrm{i}} - 2\mathrm{i}$
9. $2\mathrm{i}(\overline{3+\mathrm{i}}) + 3(\overline{1-\mathrm{i}})$

▶ Exercice n°9

Soit $z = 2-3\mathrm{i}$ et $z' = -4-\mathrm{i}$.

Calculer sous forme algébrique $z+z'$, $2z-3z'$, z^2, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{z}{z'}$ et $\dfrac{1+z}{1+z'}$.

▶ Exercice n°10

Soit $z = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer sous forme algébrique z^2, z^3 et $1+z+z^2$.

▶ Exercice n°11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(-4-\mathrm{i})\,z + 3 - 5\mathrm{i} = 0$
2. $\dfrac{z+1}{z-1} = 1+\mathrm{i}$

▶ Exercice n°12

Écrire sous forme trigonométrique le complexe z dans les cas suivants :

1. $z = 1-\mathrm{i}$
2. $z = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
3. $z = -3\mathrm{i}$
4. $z = \sqrt{2}$
5. $z = 2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$
6. $z = -3 - 3\sqrt{3}\mathrm{i}$

▶ Exercice n°13

Simplifier l'écriture de z et en déduire son module et un de ses arguments dans les cas suivants :

1. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $z = 3 \times \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$
3. $z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$
4. $z = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$

5. $z=\left(\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^2\times 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

► Exercice n°14

Écrire sous forme algébrique le complexe z dans les cas suivants :

1. $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
2. $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$
3. $z=(1+\mathrm{i})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$
4. $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

► Exercice n°15

Soit $z_1=1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2=\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de $\dfrac{1}{z_1}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et $(z_2)^{12}$.

► Exercice n°16

Soit $z=\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$.

1. Déterminer le module et un argument de z.
2. En déduire la forme trigonométrique, puis la forme algébrique de z^3 et z^{2013}.

► Exercice n°17

Soit $z_1=1+\mathrm{i}$ et $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2. En déduire le module et un argument de $z_1\cdot z_2$.
2. Calculer la forme algébrique de $z_1\cdot z_2$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

► Exercice n°18

Soit $z=\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

1. Calculer sous forme algébrique $(1+\mathrm{i})^3$, puis z.
2. Mettre sous forme trigonométrique $1+\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, puis z.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

► Exercice n°19

Écrire sous forme trigonométrique le complexe z dans les cas suivants :

1. $z=3\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$
2. $z=(1+\mathrm{i})^5$
3. $z=\dfrac{(2\sqrt{3}+2\mathrm{i})^5}{(1-\mathrm{i})^4}$

► Exercice n°20

Soit $z_1=\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $z_2=-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$ et $z_3=\dfrac{4\sqrt{3}\,z_2}{9z_1}$.

1. Déterminer le module et un argument exact de z_1, z_2 et z_3.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Montrer que le triangle OAB est rectangle.
3. Montrer que le point G d'affixe z_3 est aligné avec le milieu I de $[AB]$ et l'origine O du repère.

► Exercice n°21

Soit $z_1=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}$.

1. Écrire les complexes z_1, z_2, $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$ sous forme trigonométrique.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$.
   Montrer que le triangle AOD est rectangle et que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

► Exercice n°22

Soit $a=\dfrac{3}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\left(\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$ et $c=\dfrac{6}{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}$.

1. Déterminer le module et un argument de a, b et c.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a b et c.
   Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.
3. Montrer que le triangle OAC est équilatéral.

▶ Exercice n°23

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = 2 + 2\mathrm{i}$, C d'affixe $z_C = -2\mathrm{i}$ et M d'affixe z.

1. Déterminer l'ensemble Δ des points M tels que $|z-(2+2\mathrm{i})| = |z+2\mathrm{i}|$.
2. Soit B le point d'affixe $z_B = \dfrac{3+8\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$. Montrer que B appartient à Δ.

▶ Exercice n°24

À tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ (x et y réels), on associe $f(z) = \mathrm{i}z - 2 + 3i$.

1. Calculer $f(\mathrm{i})$.
2. Calculer $f(z)$ lorsque z est le complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.
4. Calculer X et Y , les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de x et y.
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm, montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur est une droite dont on donnera une équation.

▶ Exercice n°25

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = \left(1+\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}$ et B d'affixe $z_B = \left(1+\sqrt{2}\right) - \mathrm{i}$.

1. Montrer que $OA = OB$.
2. Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$. En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_B}{z_A}$.
3. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

▶ Exercice n°26

À tout complexe $z \neq \mathrm{i}$, on associe $Z = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

1. Montrer que si z est réel alors $|Z| = 1$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A d'affixe $z_A = \mathrm{i}$, B d'affixe $z_B = -\mathrm{i}$ et M d'affixe z.
   Montrer que si $|Z| = 1$ alors on a $AM = BM$ et z réel.