Exponentielle

▶ Exercice n°1
Simplifier les expressions suivantes :

$A = \mathrm{e}^{-\ln 8}$ $\quad B = \mathrm{e}^{3\ln 5}$ $\quad C = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 4}$

$D = \mathrm{e}^{2+\ln 3}$ $\quad E = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^3$ $\quad F = \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}\right)$

▶ Exercice n°2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x} = 3$
2. $\mathrm{e}^{x+2} = 1$
3. $\mathrm{e}^{x} + 1 = 0$
4. $\mathrm{e}^{x+3} = 5$
5. $\mathrm{e}^{x^2-x-11} = e$
6. $\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{x} + 8 = 0$
7. $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 10 = 0$
8. $\mathrm{e}^{-x} = 3 - \mathrm{e}^{x}$

▶ Exercice n°3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x} - 2 \geqslant 0$
2. $3 - \mathrm{e}^{2x} \leqslant 0$
3. $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$
4. $\mathrm{e}^{x} < 4\mathrm{e}^{-x}$

▶ Exercice n°4
Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 °C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 °C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17\mathrm{e}^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20 °C. En déduire la valeur de k.
2. Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15 °C ?

▶ Exercice n°5
Un corps radioactif se désintègre en transformant une partie de ses noyaux suivant la loi $N(t) = N_0\mathrm{e}^{-kt}$ où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs au début de l'observation, $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs à l'instant t exprimé en heures, k une constante réelle.

1. Déterminer la constante k pour le thorium, sachant qu'avec $N_0 = 1000$, on a $N(1) = 937$.
2. La période d'un élément radioactif est le temps au bout duquel il reste la moitié des atomes. Calculer la période du thorium.

▶ Exercice n°6
Déterminer, dans un tableau, le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$
2. $f(x) = \dfrac{4-x}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{x} - 2$
4. $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x}$

▶ Exercice n°7
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x^2)\mathrm{e}^{x}$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3+\mathrm{e}^{x}}$
5. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(1-\mathrm{e}^{x}\right)^2$

▶ Exercice n°8
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + \mathrm{e}^{x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x - 3\mathrm{e}^{x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + 2\mathrm{e}^{x}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{x}$

▶ Exercice n°9

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x - \mathrm{e}^x$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)\mathrm{e}^x$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} 2xe^{-x}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x}$

▶ Exercice n°10

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-4x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3}$
3. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$
4. f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{3x}{x+1}}$

▶ Exercice n°11

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - 3x$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1 + \mathrm{e}^x$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de T, la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
4. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°13

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.
4. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point A.
5. On cherche à déterminer le premier entier positif n tel que $f(n) \leqslant 0{,}01$ à l'aide de l'algorithme ci-dessous. Compléter la ligne 3 pour que l'algorithme puisse répondre à la question.

```
1: DEBUT_ALGORITHME
2:    n ← 0
3:    TANT_QUE ((f(n)...........) FAIRE
4:       DEBUT_TANT_QUE
5:       n PREND_LA_VALEUR n+1
6:       FIN_TANT_QUE
7:    AFFICHER n
8: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite D d'équation $y = -3$.
4. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

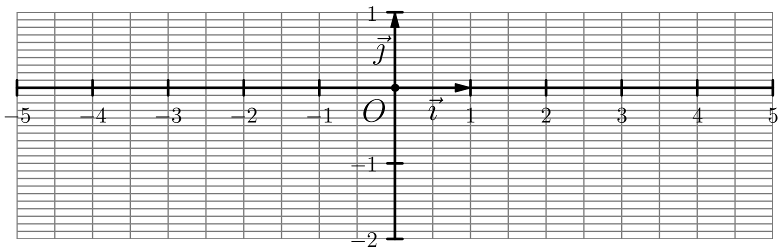
▶ Exercice n°16

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. En déduire les asymptotes à la courbe C_f.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Compléter le tableau de valeurs suivants :

x	-5	-3	-1	-0,5	0	0,5	1	3	5
$f(x)$									

5. À l'aide du tableau de valeurs, tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



► Exercice n°17

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - x - 1\right) e^x$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice n°18

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 1 + e^{-x}$.
   a) Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 2e^{-x}$.
   a) À l'aide de la question 1. c), étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice n°19

Déterminer les primitives de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x} \qquad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1} \qquad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1} \qquad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 6\mathrm{e}^{-3x+2} \qquad I = \mathbb{R}$
5. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \qquad I =]0\,;\,+\infty[$
6. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} \qquad I = \mathbb{R}$

► Exercice n°20

On admet que la charge q d'un condensateur est donnée en fonction du temps t exprimé en secondes par $q(t) = 6\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right)$ (pour $t \geqslant 0$).

1. Montrer que la fonction q est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer la charge maximale du condensateur, c'est à dire la limite de q en $+\infty$.
3. Au bout de combien de secondes la charge du condensateur sera-t-elle supérieure à 5,7.
4. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;\,+\infty[$.
5. On admet que la charge moyenne du condensateur entre 0 et 10 secondes est donnée par $\dfrac{1}{10}\,[F(10) - F(0)]$ où F est la primitive donnée à la question précédente. Donner une valeur approchée à 0,1 près de cette charge moyenne.