

Kit de survie : première partie

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

Pour tout a :	$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$	<i>même sens</i>
Pour tout $k > 0$:	$x < y \Rightarrow kx < ky$	<i>même sens</i>
Pour tout $k < 0$:	$x < y \Rightarrow kx > ky$	<i>sens contraire</i>
Pour x et y de même signe :	$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$	<i>sens contraire</i>
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$	<i>même sens</i>
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$	<i>même sens</i>
Si f croissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$	<i>même sens</i>
Si f décroissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$	<i>sens contraire</i>

(* sur un intervalle contenant x et y)

► Exemple :

• Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\frac{1}{3-x}$?

$$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3 - x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$$

b) Inégalités classiques

Pour tout x :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1.$$

c) Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

d) Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

- Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\frac{b}{2a}$.

On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

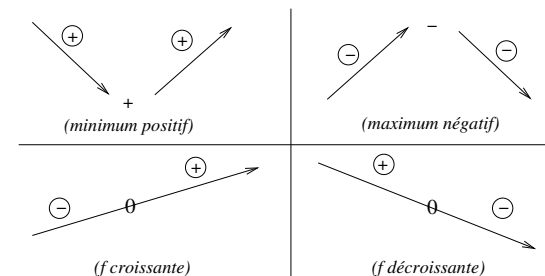
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

(on suppose que $x_1 < x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2) Étude de fonction

a) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l + l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l \times l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l \neq 0} \right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{l}$	$\left(\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty} \right)^{-1} \rightarrow 0$	$\left(\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^+} \right)^{-1} \rightarrow +\infty$	$\left(\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^-} \right)^{-1} \rightarrow -\infty$
---	--	--	--

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » :

$$\frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \times \frac{1}{(\quad)}$$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty}$; $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (*ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite*).

b) Asymptotes

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

c) Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g , on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :

- si $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors C_f est située au dessus de C_g sur I .
- si $f(x) - g(x) \leq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors C_f est située en dessous de C_g sur I .

d) Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée	Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$	f^2	$2f'f$
kf (k réel)	kf'	$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
fg	$f'g + fg'$	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

e) Tangente

- Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$
(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
- Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m , il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$.

3) Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

• Primitives des fonctions usuelles : (F représente une primitive de f)

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$
$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$	
$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$

• Formules générales :

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\frac{U^2}{2}$	$f(x) = \cos x \times \sin x \Rightarrow F(x) = \frac{(\sin x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\frac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x + 1)^2 \Rightarrow F(x) = \frac{(4x + 1)^3}{3}$
$\frac{U'}{U^2}$ ($U(x) \neq 0$)	$-\frac{1}{U}$	$f(x) = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x^3 + 1}$
$\frac{U'}{U^3}$ ($U(x) \neq 0$)	$-\frac{1}{2U^2}$	$f(x) = \frac{7}{(7x + 1)^3} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2(7x + 1)^2}$

• Recherche pratique d'une primitive :

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple* : Soit f définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(3x + 6)^2}$.

On pense à la forme $\frac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $-\frac{1}{U}$). On écrit que $f(x) = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{3}{(3x + 6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2; +\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{(3x + 6)}$.