Limites d'une fonction

▶ Exercice n°1

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$)

1. $f(x) = x + \sqrt{x}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 1$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$
5. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - 1}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2x - 3$
7. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + \frac{1}{x^2}}$

▶ Exercice n°2

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$)

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - x$
2. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 2$
4. $f(x) = \dfrac{x+1}{\frac{1}{x} - 2}$
5. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^2} + 3}{x - 1}$

▶ Exercice n°3

Déterminer la limite en a (pour $x < a$ et pour $x > a$) de la fonction f dans les cas suivants : *(on précisera si la courbe de f admet une asymptote verticale)*

1. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\qquad a = 0$
2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3$ $\qquad a = 0$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{4x} + 3$ $\qquad a = 0$
4. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$ $\qquad a = -2$
5. $f(x) = \dfrac{2}{3x-4}$ $\qquad a = \dfrac{4}{3}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2+x-3}{1-x^2}$ $\qquad a = 1$

▶ Exercice n°4

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction polynôme f dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
2. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$
3. $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

▶ Exercice n°5

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction rationnelle f dans les cas suivants : *(on précisera si la courbe de f admet une asymptote horizontale en $-\infty$ ou en $+\infty$)*

1. $f(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{2x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{-4x+1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{-x^3+2x^2-2}$
5. $f(x) = \dfrac{-2x^3}{x^3+5x^2-1}$

▶ Exercice n°6

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

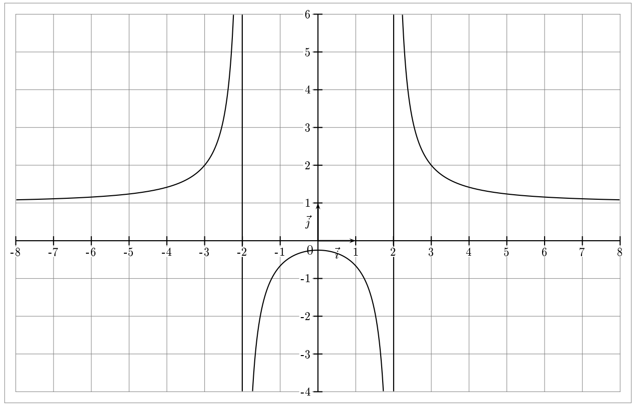
1. Étudier les limites de fi en $-\infty$, en 1 $\quad (x < 1)$, en 1 $\quad (x > 1)$ et en $+\infty$.

2. Étudier la position relative entre la courbe de f et l'asymptote horizontale sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

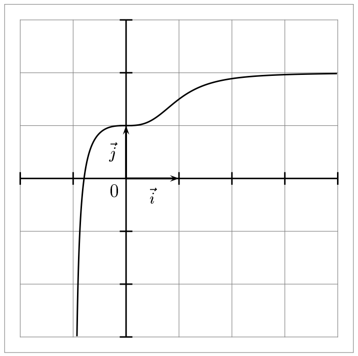
▶ Exercice n°7

Dans chacun des cas suivants, déterminer d'après la courbe les limites de la fonction f aux bornes et une équation de chacune des asymptotes.

a)



b)



▶ Exercice n°8

Compléter les phrases suivantes par « $\lim\limits_{x\to\cdots} \cdots = \cdots$ », « $x = \cdots$ », « $y = \cdots$ », « verticale », « horizontale » ou « oblique ».

1. Si $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation .... est une asymptote .... à C_f .
2. Si .... alors la droite d'équation $y = 5$ est une asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

▶ Exercice n°9

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? *(justifier sa réponse)*
« Si f est une fonction strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ alors on a nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ »

▶ Exercice n°10

Lors d'une certaine réaction chimique, la vitesse initiale v de la réaction chimique (exprimée en mol$\cdot$L$^{-1}\cdot$s^{-1}) en fonction de la concentration x (exprimée en mol$\cdot$L^{-1}) d'un certain ion est donnée par $v(x) = \dfrac{0{,}0013 \times x}{0{,}000004 + x}$ pour $x \in [0\,;\,+\infty[$.

1. Quelle est la vitesse initiale de la réaction si la concentration de l'ion est nulle ?
2. Quelle est la vitesse initiale de la réaction si la concentration de l'ion est égale à 9×10^{-6} mol $\cdot$ L^{-1} ?
3. Déterminer la limite de v quand x tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.
4. Donner la nature et l'équation de l'asymptote de la courbe représentative de la fonction v.
5. On cherche à déterminer, à l'aide d'un algorithme, le plus petit entier n pour lequel la vitesse v sera supérieure ou égale à 0,0012 mol $\cdot$ L$^{-1}\cdot$ s^{-1} si la concentration de l'ion est égale à $n\times10^{-6}$ mol $\cdot$ L^{-1}.
   Pour cela, on part de $n = 0$ et on augmente n de 1 tant que cela est nécessaire. Compléter les lignes 3 et 4 de l'algorithme ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```
 1: DEBUT_ALGORITHME
 2:   n ← 0
 3:   v ← .......
 4:   TANT_QUE (v........) FAIRE
 5:     DEBUT_TANT_QUE
 6:     n ← n+1
 7:     P ← v(n × 10^-6)
 8:     FIN_TANT_QUE
 9:   AFFICHER n
10: FIN_ALGORITHME
```

6. Résoudre dans $[0\,;\,+\infty[$ l'équation $v(x) = 0{,}0012$. En déduire ce que devrait afficher l'algorithme.