Kit de survie : quatrième partie

6) Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
• Pour tous a et b de I :
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

► *Exemple :*
$$\int_0^{\ln 2} 3\,e^{3x}\,dx = \left[e^{3x}\right]_0^{\ln 2} = e^{3\ln 2} - e^0 = e^{\ln(2^3)} - 1 = e^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
• $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*
• $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Calculs d'aires
f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.
• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)
• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*
• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) $\times$ (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
• Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaitre leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

7) Suites

a) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
• Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
• $\displaystyle U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$
(pour $q \neq 1$)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.

$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555.$

b) Limite de q^n avec $q > 0$

- si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

▶ *Exemples :*

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

c) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leqslant a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln(q^n) = n \ln q$.

▶ *Exemples :*

- Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geqslant 3000$:

$2^n \geqslant 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geqslant \ln(3000) \Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln 3000 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 3000}{\ln 2}$ (car $\ln 2 > 0$).

Or $\dfrac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11{,}55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.

- Recherche du plus petit entier n tel que $0{,}8^n \leqslant 0{,}01$:

$0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ (car $\ln 0{,}8 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

8) Équations différentielles

a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$.

▶ *Exemple :* : Résolution de $y' + 4y = 8$ ($a = 4$; $b = 8$)

- Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + \dfrac{8}{4} = k\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.
- Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = 1$:

Cela revient à déterminer k tel que $f(0) = 5 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^0 + 2 = 5 \Leftrightarrow k = 3$.
La solution particulière cherchée est donc définie par $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{-4x} + 2$.

b) Équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

▶ *Exemple :* : Résolution de $y'' + 4y = 0$ (on a $\omega^2 = 4$: on peut prendre $\omega = 2$)

- Les solutions sont définies par $f(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$.
- Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$:

$f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A\cos 0 + B\sin 0 = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}$.
Pour tout x, on a $f'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$.
$f'(0) = 2 \Leftrightarrow -2A\sin 0 + 2B\cos 0 = 2 \Leftrightarrow 2B = 2 \Leftrightarrow B = 1$.
La solution cherchée est définie par $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x)$.

9) Probabilités

a) Loi binomiale

DÉFINITION

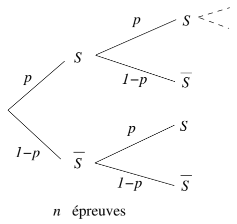
- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
- On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

▶ *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires ≪ obtenir un 6 ≫ et ≪ ne pas obtenir un 6 ≫ est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer le dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .

▶ **Remarques :**

- Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour ≪ succès≪) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).
- Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le ≪ succès≪ a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

PROPRIÉTÉ



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Probabilité d'obtenir k succès ($0 \leqslant k \leqslant n$) :**
$p(X = k) = \binom{n}{k}\, p^k\, (1-p)^{n-k}$
(Le coefficient $\binom{n}{k}$ s'obtient avec la calculatrice : n `nCr` k)

• **Espérance de** X : $E(X) = np$

• **Variance de** X : $V(X) = np(1-p)$

• **Écart-type de** X : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

► *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\ \left(\frac{1}{6}\right)^3\ \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$

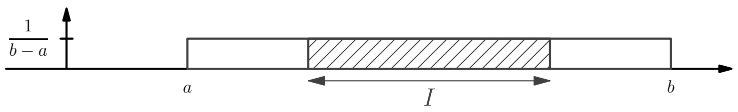
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$

L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

b) Loi uniforme

DÉFINITION

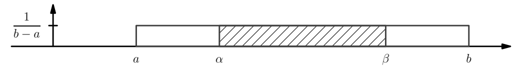
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.



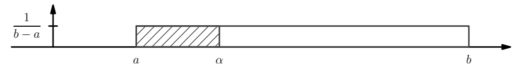
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \dfrac{\beta - \alpha}{b-a}$



$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \dfrac{\alpha - a}{b-a}$



$p\,(X \geqslant \beta) = p\,(\beta \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b - \beta}{b-a}$

$p\,(X = \alpha) = 0$

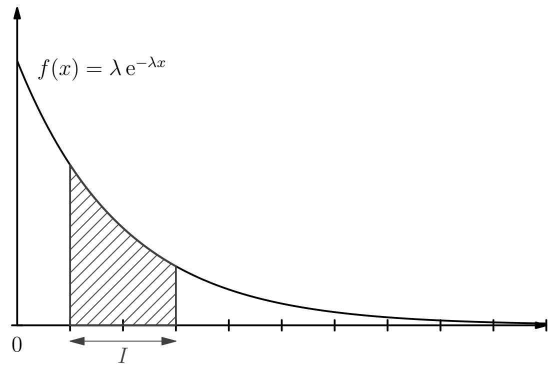
(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

c) Loi exponentielle

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[0\,;+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$

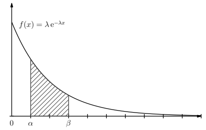


On a donc $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x \in I} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

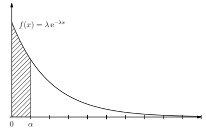
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

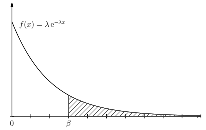
$$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{\alpha}^{\beta}$$



$$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(0 \leqslant X \leqslant \alpha) = \int_{0}^{\alpha} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{\alpha}$$



$$p\,(X \geqslant \beta) = 1 - p\,(0 \leqslant X \leqslant \beta) = 1 - \int_{0}^{\beta} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{\beta}$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

► *Exemple :* La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0006$ sur $[0, +\infty[$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

$$p(X < 1000) = \int_0^{1000} 0{,}0006e^{-0{,}0006x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-0{,}0006x}\right]_0^{1000} = 1 - e^{-0{,}6}.$$

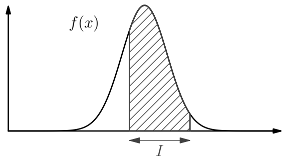
La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

$$p(X > 500) = 1 - \int_0^{500} 0{,}0006e^{-0{,}0006x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-0{,}0006x}\right]_0^{500} = e^{-0{,}3}.$$

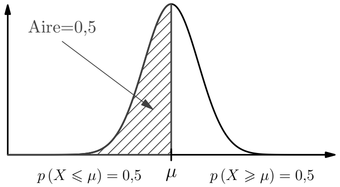
d) Loi normale

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.



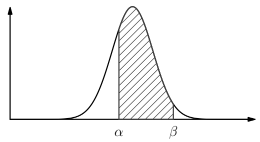
► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



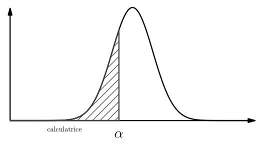
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ alors pour tous réels α et β, on a :

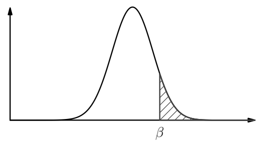
$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p\,(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99},\alpha,\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p\,(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` $(\beta,10^{99},\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**

$p\,(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$
$p\,(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$
$p\,(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

► *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0{,}682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0{,}308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0{,}252493$

► *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11{,}9 \leqslant X \leqslant 12{,}2) \approx 0{,}888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

► *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0{,}067$ et $p(X < 3) = 0{,}159$.
On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leqslant 2) = 0{,}933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0{,}092$.

10) Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

PROPRIÉTÉ

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

PROPRIÉTÉ

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question.
L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0{,}476\,;\,0{,}564]$ car :
$0{,}52 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}52 \times 0{,}48}{500}} \approx 0{,}476$ et $0{,}52 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}52 \times 0{,}48}{500}} \approx 0{,}564$.
0,47 étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

PROPRIÉTÉ

On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \,;\, f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[15{,}6\%\,;\,20{,}3\%]$ car :
$0{,}18 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}18 \times 0{,}82}{1000}} \approx 0{,}156$ et $0{,}18 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}18 \times 0{,}82}{1000}} \approx 0{,}203$.