Kit de survie : troisième partie

5) Complexes

a) Forme algébrique - Calculs dans $\mathbb{C}$

• Tout complexe s'écrit de façon unique sous la **forme algébrique** $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels) avec $\mathrm{i}^2 = -1$.
• a est la **partie réelle** et b est la **partie imaginaire** .
• Le conjugué de z est $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.
• Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique :
– si le dénominateur est de la forme $\mathrm{i}b$, on multiplie en haut et en bas par i ;
– si le dénominateur est de la forme $a + \mathrm{i}b$, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

► *Exemples de calculs dans* $\mathbb{C}$ *:*
• $3\mathrm{i}(3 + 4\mathrm{i}) = 3\mathrm{i} + 12\mathrm{i}^2 = -12 + 3\mathrm{i}$
• $(1 + 2\mathrm{i})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2\mathrm{i} + (2\mathrm{i})^2 = 1 + 4\mathrm{i} - 4 = -3 + 4\mathrm{i}$
• $\dfrac{3}{\mathrm{i}} = \dfrac{3}{\mathrm{i}} \times \dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = \dfrac{3\mathrm{i}}{-1} = -3\mathrm{i}$
• $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})} = \dfrac{6-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2}{3^2+2^2} = \dfrac{8-\mathrm{i}}{13}$
• Résolution de l'équation $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{-1+3\mathrm{i}} = z$: $\dfrac{1+\mathrm{i}z}{-1+3\mathrm{i}} = z \Leftrightarrow 1 + \mathrm{i}z = (-1+3\mathrm{i})z$
$\Leftrightarrow 1 = (-1+2\mathrm{i})z \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{-1+2\mathrm{i}} = \dfrac{1}{-1+2\mathrm{i}} \times \dfrac{-1-2\mathrm{i}}{-1-2\mathrm{i}} = \dfrac{-1-2\mathrm{i}}{1^2+2^2} = \dfrac{-1-2\mathrm{i}}{5}$.

Propriétés sur les conjugués :
$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z' \neq 0)$.

b) Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z = a + \mathrm{i}b$ (a et b réels) :
• Le **module** de z est : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
• Si $z \neq 0$, tout réel θ tel que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{\text{partie rélle}}{\text{module}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{cases}$
est un **argument** de z. On note $arg\, z = \theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

• Pour tout θ, on pose $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.
• $e^{\mathrm{i}\theta} \times e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{e^{\mathrm{i}\theta}} = e^{-\mathrm{i}\theta}$; $\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} = e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$; $\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta}$
• $|e^{\mathrm{i}\theta}| = 1$; $\overline{(e^{\mathrm{i}\theta})} = e^{-i\theta}$; $e^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$
• Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z = r\,e^{\mathrm{i}\theta}$ (**forme trigonométrique** ou forme exponentielle)
• Si $z = r\,e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $arg\, z = \theta + 2k\pi$.
• $r\,e^{i\theta} = r'\,e^{\mathrm{i}\theta'}$ (avec $r > 0$ et $r' > 0$) $\Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

► *Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :*
Soit $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$. $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$. D'où $z = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

► *Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :*
$z = 4e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + \mathrm{i}2\sqrt{2}$.

► *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*
• *Calcul de* $(1-\mathrm{i})^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.
On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z = 1 - \mathrm{i}$:
$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\dfrac{\pi}{4}$. D'où $z = \sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

$(1-\mathrm{i})^{12} = z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{-\mathrm{i}\frac{12\pi}{4}} = 64\,e^{-\mathrm{i}3\pi} = 64\left(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\right) = -64$

• *Soit* $z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$ *et* $z_2 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$. *Calculer la forme trigonométrique de* z_1*,* z_2 *et* $\dfrac{z_1}{z_2}$*. En déduire la valeur de* $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

En calculant le module et un argument de z_1 et z_2, on montre que $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et que $z_1 = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. On en déduit que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$.
Ainsi $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
Or, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)}{4} = \dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + \mathrm{i}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

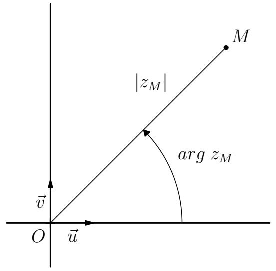
Donc, $\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\text{partie rélle de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\text{partie imaginaire de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

c) Complexes et géométrie

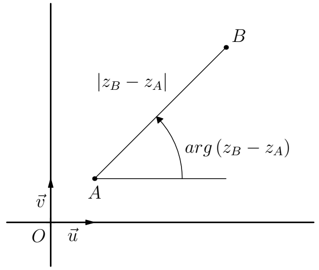
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

- L'affixe du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_M = x + \mathrm{i}y$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_{\overrightarrow{V}} = x + iy$.
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}} = z_{\overrightarrow{U}} + z_{\overrightarrow{V}}$; $z_{k\overrightarrow{U}} = k \cdot z_{\overrightarrow{U}}$

- Si M est d'affixe z alors $|z_M| = OM$ et $arg\ z_M = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ $(z \neq 0)$.



- Si A et B sont deux points distincts d'affixes z_A et z_B alors la distance AB est égale à $|z_B - z_A|$ et $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\,(z_B - z_A)$.



- Pour déterminer la nature d'un triangle ABC, il suffit de calculer ses côtés avec $AB = |z_B - z_A|$,...
- Pour montrer que deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{V}} = k \cdot z_{\overrightarrow{U}}$.
- Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{AC}} = k \cdot z_{\overrightarrow{AB}}$.
- Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{CD}} = k \cdot z_{\overrightarrow{AB}}$.

- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ $(r > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon r (car $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$) .
- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ $(z_A \neq z_B)$ est la médiatrice du segment $[AB]$ (car $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$).

► *Exemple :* Soit A et B les points d'affixe $z_A = 2 + 2\mathrm{i}$ et $z_B = 4\mathrm{i}$.
La distance OA est égale à $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.
La distance OB est égale à $|z_B| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.
La distance AB est égale à $|z_B - z_A| = |4\mathrm{i} - (2 + 2\mathrm{i})| = |-2 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.
On en déduit que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A car $AO = AB$ et $AO^2 + AB^2 = OB^2$.
Si on veut une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right)$, il suffit de déterminer un argument de

$z_A : \begin{cases} \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi.$

L'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = arg\ \left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$

(avec $A \neq B$ et $A \neq C$)