Kit de survie : deuxième partie

4) Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a) Existence

- $\ln x$ n'existe que si $x > 0$.
- e^x existe pour tout réel x.

▶ *Exemple :*
La fonction f définie par $f(x) = \ln(x-1)$ n'est définie que sur $]1\,;+\infty[$ car il faut que $x-1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

c) Valeurs particulières

- $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$
- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

d) Propriétés algébriques

Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
Pour tout entier n, $\ln(a^n) = n\ln a$; $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

Pour tous réels a et b :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{an}$

▶ *Exemples :*
Si $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2\ln x$
Pour tout x, $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

- **Signe de $\ln x$:**
  Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
  Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.
  $\ln 1 = 0$.
- **Signe de e^x :** pour tout réel x, e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

- Si $a > 0$ et $b > 0$:
  $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$; $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$; $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$
- Si $a > 0$: $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$; $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$; $e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$

▶ *Remarque :*
Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

▶ *Exemples d'équations et d'inéquations :*

- $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition :
$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{e^5}{2}\right\}$

- $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition :
$\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e - 2$. $S =]-2; e-2]$

- $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.
$\Delta = 16$; $X = -1$ ou $X = 3$.
D'où, $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

- $e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \dfrac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5$ (car $e^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$.
$S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

g) Limites

Situation en $+\infty$:
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$

(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$

(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

▶ *Exemples :*
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(3 - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{(1+\frac{1}{\mathrm{e}^x})} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$

Situation en 0 :
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x = -\infty$
- Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n \times \ln x = 0$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.

▶ *Exemple :*

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} + \ln x = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x = 0$

Situation en $-\infty$:
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \times \mathrm{e}^x = 0$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.

▶ *Exemple :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

h) Dérivées et primitives

- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u>0)$
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

▶ *Exemples :*

$\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $\left[\mathrm{e}^{-x}\right]' = -\mathrm{e}^{-x}$

- Si $U>0$, une primitive de $\dfrac{U'}{U}$ est $\ln U$.
- Une primitive de $U'\mathrm{e}^U$ est e^U.

▶ *Exemples :*
- Soit f définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x-8}$. On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \underbrace{\dfrac{4}{4x-8}}_{\text{forme exacte } \frac{U'}{U}}$.

Une primitive de f sur $]2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x-8)$.

- Si $f(x) = e^{-x} = -\left(-e^{-x}\right)$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = -e^{-x}$.

- Si $f(x) = e^{4x+5}$, on écrit que $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \underbrace{\left(4e^{4x+5}\right)}_{\text{forme exacte } U'\mathrm{e}^U}$.

Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+5}$.