1. Rappels sur la loi binomiale

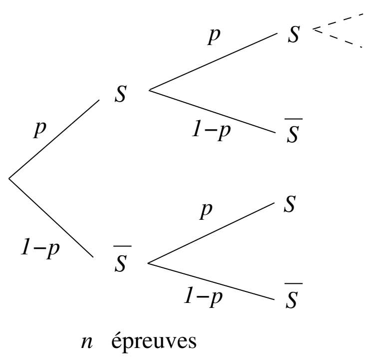
Définition

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer notre dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n« ($1 \leqslant n \leqslant 6$), ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

► **Remarques :**
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès«) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).
• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le « succès« a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

Propriété



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répèter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Probabilité d'obtenir** k **succès** : $p(X=k) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$
(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)
• **Espérance de** X : $E(X) = np$
• **Variance de** X : $V(X) = np(1-p)$
• **Écart-type de** X : $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

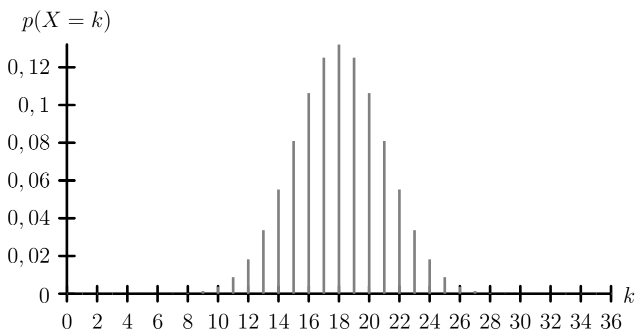
► *Exemple 1:* On lance 5 fois de suite un dé et on note X le nombre de 6 obtenus.

a) On répète $\boxed{}$ fois l'épreuve de Bernoulli $\boxed{}$.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = \boxed{}$ et $p = \boxed{}$.

b) La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égal à : $\boxed{}$
.

► *Exemple 2:* On lance 36 fois de suite une pièce et on note X le nombre de « pile » obtenus.
X suit la loi binomiale de paramètres $n = \boxed{}$ et $p = \boxed{}$ dont la représentation graphique est :



a) La probabilité d'obtenir exactement 10 fois « pile » est égale à $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

b) La probabilité de n'obtenir que des « pile » est égale à $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

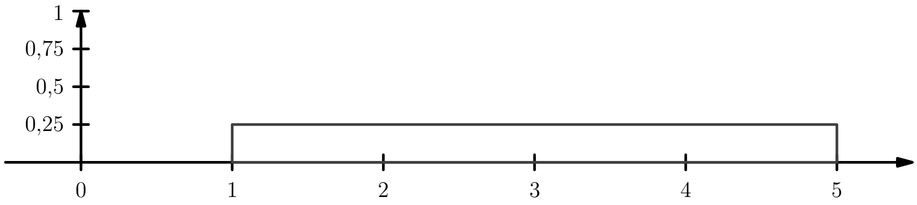
c) L'espérance de X (nombre moyen de « pile » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égal à $\boxed{\qquad\qquad}$.

d) L'écart-type de X est égal à $\boxed{\qquad\qquad}$.

2. Loi uniforme

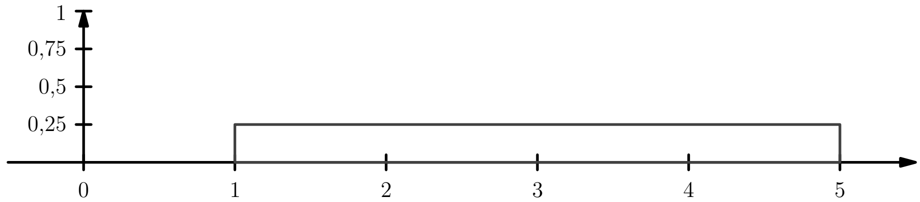
a) Exemple introductif

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un réel au hasard (noté X) dans l'intervalle $[1\,;\,5]$ et le rectangle ci-dessous de hauteur $\dfrac{1}{4}$.

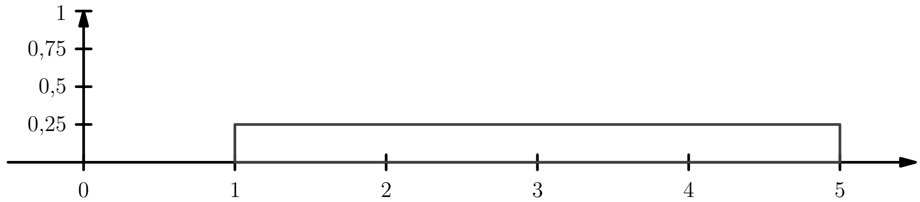


On admet que tous les réels sont uniformément répartis.
Intuitivement, on peut estimer que :

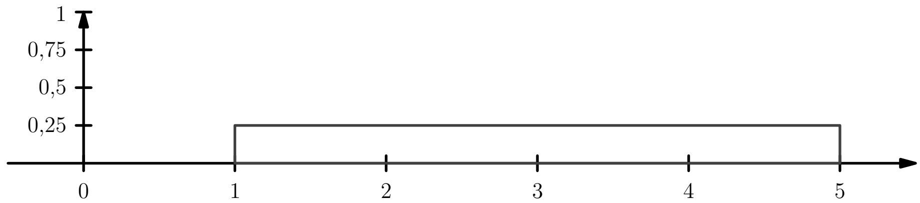
- $p\,(1 \leqslant X \leqslant 5) = \boxed{\qquad}$, ce qui correspond à l'aire de la zone hachurée :



- $p\,(1 \leqslant X \leqslant 3) = \boxed{\qquad}$, ce qui correspond à l'aire de la zone hachurée :



- $p\,(4 \leqslant X \leqslant 5) = \boxed{\qquad}$, ce qui correspond à l'aire de la zone hachurée :



Par contre, comme il y a une infinité de réels dans l'intervalle $[1\,;\,5]$, on est « obligé » de considérer que :

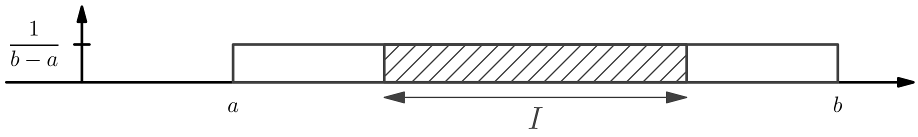
- $p\,(X = 2) = \boxed{\qquad}$.
- $p\,(X = 4) = \boxed{\qquad}$.

On dit que X suit $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

b) Cas général

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.

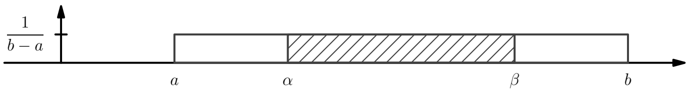


On peut considérer que $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x\in I} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$. (« aire sous la courbe »)

PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$$p\,(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$



$$p\,(X \leqslant \alpha) = p\,(a \leqslant X \leqslant \alpha) = \frac{\alpha-a}{b-a}$$

$$p\,(X \geqslant \beta) = p\,(\beta \leqslant X \leqslant b) = \frac{b-\beta}{b-a}$$

$$p\,(X = \alpha) = 0$$

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

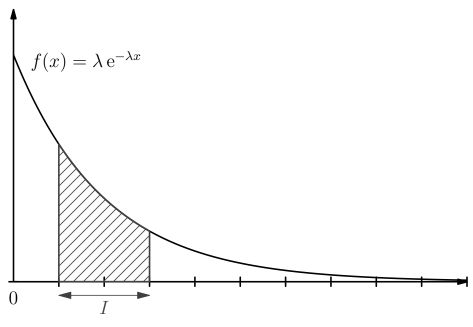
• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$ et sa **variance** est égale à $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

► **Remarque :** les calculatrices et divers logiciels fournissent une fonction « random() » (ou « ALEA() ») qui permet d'obtenir un nombre pseudo-aléatoire compris entre 0 et 1. Pour simuler le tirage au hasard d'un réel dans $[a\,;\,b]$, on peut utiliser $a + (b-a) * \mathrm{random}()$.

3. Loi exponentielle

DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$

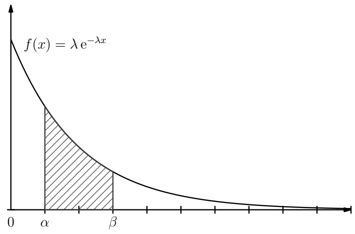


► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe de 0 à $+\infty$ est égale à 1 unité d'aire et on dit que f est une densité de probabilité.

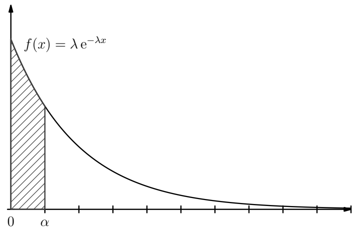
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0\,;\,+\infty[$, on a :

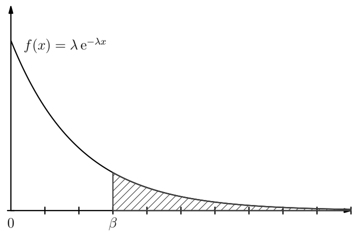
$$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{\alpha}^{\beta}$$



$$p(X \leqslant \alpha) = p(0 \leqslant X \leqslant \alpha) = \int_{0}^{\alpha} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{\alpha}$$



$$p(X \geqslant \beta) = 1 - p(0 \leqslant X \leqslant \beta) = 1 - \int_{0}^{\beta} \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{0}^{\beta}$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0\,;\,+\infty[$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

► *Exemple 1:* La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0006$ sur $[0\,;\,+\infty[$. On a $p(X < 100) =$

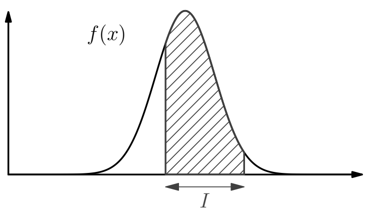
et $p(X \geqslant 400) =$

► *Exemple 2:* Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$.
Détermination de la valeur de λ sachant que $p(X < 70) = 0{,}05$:

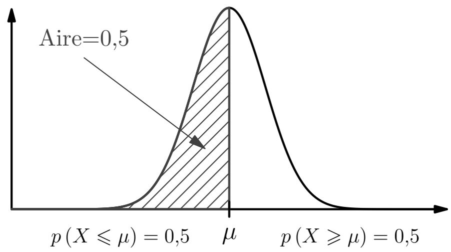
4. Loi normale

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$



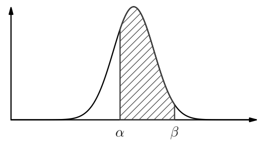
► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



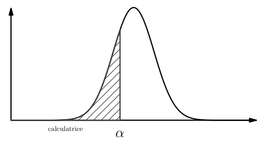
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** alors pour tous réels α et β, on a :

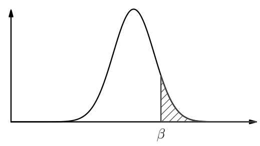
$p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` $(\alpha,\beta,\mu,\sigma)$
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \leqslant \alpha) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99},\alpha,\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ



$p(X \geqslant \beta) =$
TI : `normalcdf` $(\beta,10^{99},\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables :**
$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$; $p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$; $p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

► *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0{,}682689$; $p(X \leqslant 55) \approx 0{,}308538$; $p(X \geqslant 62) \approx 0{,}252493$

► *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p(11{,}9 \leqslant X \leqslant 12{,}2) =$ $\boxed{\qquad\qquad}$, donc $\boxed{\qquad\qquad}$ % des tubes sont acceptés par le client.

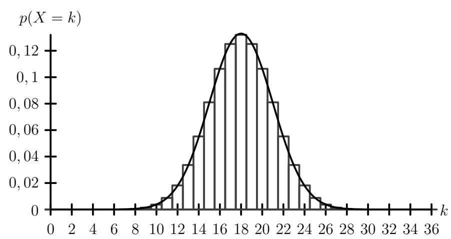
► *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0{,}067$ et $p(X < 3) = 0{,}159$.
On peut en déduire que $p(X > 2) =$ $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

et $p(2 < X < 3) =$ $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

5. Approximation de la loi binomiale par la loi normale

a) Exemple introductif

On reprend l'exemple du lancer, 36 fois de suite, d'une pièce. Si on remplace chaque bâton par un rectangle de même hauteur et de largeur 1 et si on ajoute la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ avec $\mu = 18$ et $\sigma = 3$, on obtient le graphique ci-contre. L'aire de chaque rectangle est égale à $p(X = k)$ car sa largeur est de 1. On peut constater qu'ajouter les aires de rectangles consécutifs donne un résultat proche de l'aire sous la courbe correspondante.



b) Cas général

Propriété

Si une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p avec $np > 1$ alors on peut utiliser la loi normale d'espérance $\mu = np$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ pour déterminer une valeur approchée des probabilités concernant X.

► *Exemple :* On lance 180 fois un dé et note X le nombre de 6 obtenus. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \dfrac{1}{6}$. Son espérance est $E(X) = np = 30$ et son écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = 5$.
Seulement, les calculatrices ne permettent pas de calculer les coefficients $\binom{n}{k}$ car n est trop grand. On peut alors approcher la loi binomiale par la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
Ainsi on peut trouver que la probabilité d'obtenir moins de 20 fois un 6 est telle que :
$p(X \leqslant 20) \approx \boxed{}$.

6. Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

Propriété

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

Propriété

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question.

a) L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est :

$\boxed{}$

b) Donc on peut $\boxed{}$ l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

Propriété

On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%.
L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est :

$\boxed{}$