Primitives

▶ Exercice n°1

Déterminer les primitives de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x - 4 \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + \dfrac{1}{3} \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = -\dfrac{2}{x^2} \quad I =]0; +\infty[$
5. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} \quad I =]0; +\infty[$
6. $f(x) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{6}\right) \quad I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) \quad I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = 5(5x-1)^3 \quad I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \quad I = \mathbb{R}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^2 \quad I =]0; +\infty[$

▶ Exercice n°2

Déterminer les primitives de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = (2x-1)^3 \quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{(\cos x)^2} \quad I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$
3. $f(x) = x(2x^2+1)^3 \quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(2x-3)^2} \quad I = \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$
5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{(5+4\sin x)^2} \quad I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = \dfrac{12}{(3x-2)^2} \quad I = \left]\dfrac{2}{3}; +\infty\right[$
7. $f(x) = \sin x\,(\cos x)^2 \quad I = \mathbb{R}$

▶ Exercice n°3

Déterminer F, la primitive de f sur I vérifiant la condition donnée, dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{6x}{(x^2+1)^2} \qquad F(0) = 1 \qquad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} \qquad F(2) = 0 \qquad I =]1; +\infty[$

▶ Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-2)^2}$, pour tout x de $]2; +\infty[$.
2. En déduire F, la primitive de f sur $]2; +\infty[$ telle que $F(3) = 1$.

▶ Exercice n°5

Déterminer les réels a et b pour que la fonction F définie par $F(x) = (ax+b)\sqrt{3x+5}$ soit une primitive sur $\left]-\dfrac{5}{3}; +\infty\right[$ de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+5}$.

Rappels de trigonométrie pour l'exercice 6 :

$\cos(a+b) = \cos a\,\cos b - \sin a\,\sin b \quad ; \quad \cos(a-b) = \cos a\,\cos b + \sin a\,\sin b$

$\cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2 = 2(\cos a)^2 - 1 = 1 - 2(\sin a)^2$

$\sin(a+b) = \sin a\,\cos b + \sin b\,\cos a \quad ; \quad \sin(a-b) = \sin a\,\cos b - \sin b\,\cos a$

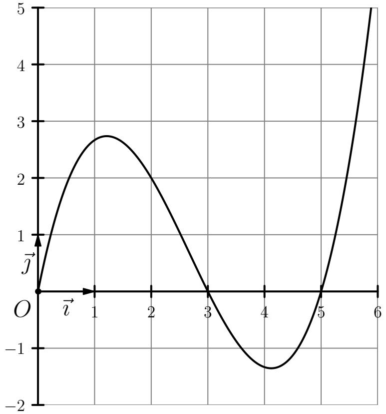
$\sin(2a) = 2\,\sin a\,\cos a$

▶ Exercice n°6

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\cos x)^3$.
   a) Montrer que, pour tout x, $f(x) = \cos x - \cos x\,(\sin x)^2$.
   b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (\sin x)^3$.
   a) Montrer que, pour tout x, $g(x) = \sin x - \sin x\,(\cos x)^2$.
   b) En déduire une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
3. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (\cos x)^2$.
   a) Montrer que, pour tout x, $h(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.
   b) En déduire une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction i définie par $i(x) = (\sin x)^2$.

▶ Exercice n°7

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;\,6]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :

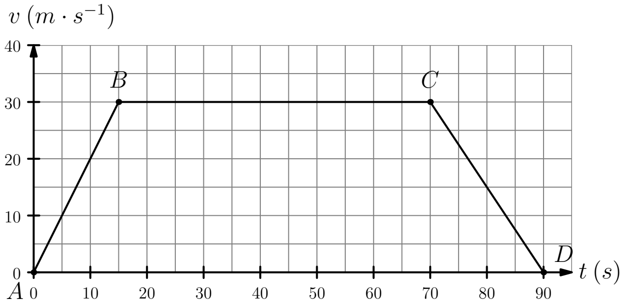


On note F la primitive de f sur $[0\,;\,6]$ telle que $F(2) = 3$.

1. Déterminer $F'(0)$, $F'(2)$ et et $F'(3)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de la primitive F au point d'abscisse 2.
3. Déterminer le tableau de variations de F.

▶ Exercice n°8

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la vitesse v (en mètres par seconde) d'une moto sur une route rectiligne en fonction du temps t (en secondes).



1. On note d la fonction qui donne la distance parcourue (en mètres) en fonction du temps t. On rappelle que la fonction vitesse v est la dérivée de la fonction distance d. Compléter la phrase suivante :
   Si $v(t) = d'(t)$ alors on peut dire que la fonction ...... est une primitive de la fonction ....
2. Mouvement entre 0 et 15 secondes :
   a) En déterminant une équation de la droite (AB), déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 0 et 15 secondes.
   b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 0 et 15 secondes.
   c) Quelle est la distance parcourue au bout de 15 secondes ?
3. Mouvement entre 15 et 70 secondes :
   a) Quelle est l'expression de $v(t)$ entre 15 et 70 secondes ?
   En déduire $d(t)$ pour t compris entre 15 et 70 secondes.
   b) Quelle est la distance parcourue au bout de 70 secondes ?
4. Mouvement entre 70 et 90 secondes :
   a) En déterminant une équation de la droite (CD), déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t pour t compris entre 70 et 90 secondes.
   b) En déduire $d(t)$ pour t compris entre 70 et 90 secondes.
   c) Quelle est la distance parcourue au bout des 90 secondes ?

Remarque :
- Entre 0 et 15 secondes, le mouvement est dit uniformément accéléré ;
- Entre 15 et 70 secondes, le mouvement est dit uniforme ;
- Entre 70 et 90 secondes, le mouvement est dit uniformément décéléré.

▶ Exercice n°9

Pour un condensateur parfait de capacité C (en farads), l'intensité $i(t)$ (en ampères) et la tension (en volts) sont liés par la relation :

$$i(t) = C \times \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow i(t) = C \times u'(t)$$

On admet que $C = 10^{-6}$ F, $i(t) = 0{,}00314 \times \sin(6280t)$ et $u(0) = -0{,}5$ V.
Déterminer $u(t)$ en fonction de t.

▶ Exercice n°10

Soit g et h deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
On considère les deux propositions suivantes :
- *Proposition A :* « Pour tout x de I, $g\prime(x) = h(x)$ »
- *Proposition B :* « g est une primitive de h sur I »

1. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ?
2. Exprimer la négation de la proposition A.