Logarithme

▶ Exercice n°1
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:

1. $\ln(8)$
2. $\ln(8) + \ln(32)$
3. $\ln(64) - \ln(8)$
4. $\ln(16) - 3\ln(2)$

▶ Exercice n°2
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:
(e *est le nombre tel que* $\ln \mathrm{e} = 1$*)*

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$
2. $\ln(81) - 2\ln(3)$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)$
4. $\ln\left(9\mathrm{e}^2\right)$

▶ Exercice n°3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+1) = 0$
2. $\ln(2-3x) = \ln 4$
3. $\ln(2x) = \ln(x-1)$
4. $\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 6$
5. $\ln\left[(x-1)(x-2)\right] = \ln 6$
6. $\ln(4x+1) + \ln(x+2) - 2\ln(3x) = 0$
7. $\ln x = 4$
8. $\ln(2x) = 5$
9. $\ln(3x) = 1$
10. $\ln(1+x) = -2$
11. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$
12. $(\ln x)^2 - 6\ln x + 8 = 0$

▶ Exercice n°4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+1) \leqslant 0$
2. $\ln x \geqslant 3$
3. $1 - \ln x \geqslant 0$
4. $\ln x - 4 \leqslant 0$
5. $\ln(2-x) \geqslant 0$
6. $\ln(x^2 - 4x + 7) \geqslant \ln 4$

▶ Exercice n°5
Déterminer, dans un tableau, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\ln x \qquad I =]0\,;\,+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{3-x} \qquad I =]0\,;\,+\infty[$
3. $f(x) = (\ln x) - 4 \qquad I =]0\,;\,+\infty[$
4. $f(x) = 1 - \ln x \qquad I =]0\,;\,+\infty[$
5. $f(x) = \ln(x-4) \qquad I =]4\,;\,+\infty[$

▶ Exercice n°6
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$
2. f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$
3. f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
4. f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4\ln x}{x^2}$

▶ Exercice n°7
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x + \ln x$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\ln x)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 3(\ln x) + x^2$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} - \ln x$

▶ Exercice n°8
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 6x - \ln x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{\ln x}$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(1-\ln x)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} + 2\ln x$

▶ Exercice n°9
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x-6)$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2)$
3. f est définie sur $]-\infty\,;\,2[$ par $f(x) = \ln(-2x+4)$
4. f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(3+\dfrac{1}{x}\right)$
5. f est définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x}{x-2}\right)$

▶ Exercice n°10
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$ et étudier ses variations sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°11
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°12
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1 + \ln x$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.
4. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x+1)(\ln x - 2)$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°13
Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2-x-2)$.

1. Déterminer les limites de f en 2 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $]2;+\infty[$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.

▶ Exercice n°14
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x}$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4. En remarquant que, pour tout $x>0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}\times\ln x - 2\times\dfrac{1}{x}$, déterminer une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°15
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 8\ln x - 3x + \dfrac{4}{x}$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un point de la courbe C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -3.

▶ Exercice n°16
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°17
Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \ln x$.

1. Déterminer les limites de f en 2 et en $+\infty$.
2. Dériver f et montrer que, pour tout x de $]2;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x\,(x-2)^2}$.

3. En déduire les variations de f sur $]2;+\infty[$.
4. Montrer que la fonction h définie par $h(x) = \ln(x-2) + x(\ln x - 1)$ est une primitive de f sur $]2;+\infty[$.

▶ Exercice n°18

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$.
   a) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b) Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.
   c) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°19

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln x$.
   a) Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. Soit G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x) = (x+1)\ln x$.
   a) Étudier les limites de G en 0 et en $+\infty$.
   b) Vérifier que G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.
   c) En déduire les variations de G sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°20

Déterminer les primitives de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad I =]1\,;+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ $\qquad I =]-\infty\,;3[$
3. $f(x) = \dfrac{x}{3x^2+1}$ $\qquad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = 3x - \dfrac{1}{x-4}$ $\qquad I =]-\infty\,;4[$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $\qquad I =]0\,;+\infty[$
6. $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ $\qquad I =]0\,;+\infty[$

▶ Exercice n°21

Soit f définie sur $I = \left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{4x-6}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x de I, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{4x-6}$.
2. En déduire les primitives de f sur I.

▶ Exercice n°22

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le plus petit entiers positif n vérifiant la relation donnée :

1. $3^n \geqslant 800$
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01$
3. $(1{,}03)^n \geqslant 2$
4. $(0{,}95)^n \leqslant 0{,}2$

▶ Exercice n°23

Le pH d'une solution est défini par $\mathrm{pH} = -\log[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ désigne la concentration en moles par litre d'ions H_3O^+ contenus dans la solution.

1. Une solution de 150 millilitres admet une concentration d'ions H_3O^+ de 10^{-2} moles par litre.
   a) Calculer le pH de cette solution.
   b) Combien de moles d'ions H_3O^+ contient cette solution ?
2. On ajoute à la solution 850 millilitres d'eau distillée.
   a) Quelle est la concentration en ions H_3O^+ dans la nouvelle solution obtenue ?
   b) En déduire le nouveau pH.

▶ Exercice n°24

L'échelle de Richter sert à mesurer la puissance d'un tremblement de terre. La magnitude d'un séisme sur cette échelle est donnée par :

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où A représente l'amplitude maximale des ondes relevée par un sismographe et A_0 une amplitude référence.

1. Que vaut $\dfrac{A}{A_0}$ pour un séisme de magnitude égale à 5 ?
2. Si l'amplitude maximale des ondes A est multipliée par 100, de combien augmente la magnitude ?

► Exercice n°25

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x) = 8{,}68 \times \ln x + 93{,}28$$

1. Calculer l'intensité sonore correspondante à une pression acoustique de 5 bars.
2. Justifier que f est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Un individu normal ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels. On cherche à connaitre le premier nombre entier x de bars pour lequel l'intensité $f(x)$ dépasse 120 décibels à l'aide d'un algorithme.
   Pour cela on part d'une pression $x = 1$ que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire.
   Compléter la ligne 5 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il réponde au problème :
   (attention : en informatique, la syntaxe utilisée pour le logarithme népérien est `log` *et pas* `ln`)

```
 1: VARIABLES
 2: x EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: DEBUT_ALGORITHME
 4:   x PREND_LA_VALEUR 1
 5:   TANT_QUE (8.68*log(x)+93.28...........) FAIRE
 6:     DEBUT_TANT_QUE
 7:     x PREND_LA_VALEUR x+1
 8:     FIN_TANT_QUE
 9:   AFFICHER x
10: FIN_ALGORITHME
```

► Exercice n°26

Pour mesurer la perte de puissance dans une fibre optique, on utilise le coefficient d'atténuation (exprimé en décibels par kilomètre) défini par :

$$A = \frac{1}{L} \times 10 \times \log\left(\frac{P_e}{P_s}\right)$$

où L est la longueur (en kilomètres) de la fibre optique, P_e est la puissance (en mW) du signal lumineux à l'entrée de la fibre et P_s est la puissance (en mW) du signal lumineux à la sortie de la fibre.

1. Un technicien effectue une mesure à la sortie d'une fibre de 5 km dont la puissance d'entrée est $P_s = 5$ mW. Il obtient une puissance de sortie égale à $P_s = 3{,}5$ mW. Calculer la valeur du coefficient d'atténuation correspondant.
2. Lorsque $P_s = \frac{1}{10} \times P_e$, on considère que la fibre optique doit-être remplacée. Quelle est alors la valeur de A pour une fibre de 10 km ?
3. Expliquer pourquoi le coefficient d'atténuation ne peut pas être négatif.

► Exercice n°27

On considère la proposition suivante : « Si $x = \mathrm{e}$ alors $(\ln x)^2 = 1$ ».

1. La proposition est-elle vraie ?
2. Écrire la réciproque de cette proposition.
3. La réciproque est-elle vraie ?