# Géométrie-Trigonométrie-Complexes

### ▶ Exercice n°1
Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ sachant que $\|\overrightarrow{u}\|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{2}$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\dfrac{\pi}{3}$.

### ▶ Exercice n°2
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

### ▶ Exercice n°3
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ avec $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

### ▶ Exercice n°4
En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

### ▶ Exercice n°5
Déterminer les réels $A$ et $B$ tels que, pour tout réel $x$ :
$2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$.

### ▶ Exercice n°6
Déterminer les réels $A$ et $B$ tels que, pour tout réel $x$ :
$2\sqrt{2}\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=A\cos(3x)+B\sin(3x)$.

### ▶ Exercice n°7
Déterminer le réel $\varphi$ tel que, pour tout réel $x$ :
$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{2}\sin(2x)=\cos(2x+\varphi)$

### ▶ Exercice n°8
Écrire sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$
2. $(3+\mathrm{i})(-4+2\mathrm{i})$
3. $(2+\mathrm{i})^2$
4. $(\sqrt{2}-\mathrm{i})^2$
5. $-\dfrac{3}{\mathrm{i}}$
6. $\dfrac{1}{2+\mathrm{i}}$
7. $\dfrac{2+\mathrm{i}}{1-3\mathrm{i}}$
8. $\overline{1+\mathrm{i}}-2\mathrm{i}$
9. $2\mathrm{i}(\overline{3+\mathrm{i}})+3(\overline{1-\mathrm{i}})$

### ▶ Exercice n°9
Soit $z=2-3\mathrm{i}$ et $z'=-4-\mathrm{i}$.
Calculer sous forme algébrique $z+z'$, $2z-3z'$, $z^2$, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{z}{z'}$ et $\dfrac{1+z}{1+z'}$.

### ▶ Exercice n°10
Soit $z=\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer sous forme algébrique $z^2$, $z^3$ et $1+z+z^2$.

### ▶ Exercice n°11
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(-4-\mathrm{i})\,z+3-5\mathrm{i}=0$
2. $\dfrac{z+1}{z-1}=1+\mathrm{i}$

### ▶ Exercice n°12
Écrire sous forme trigonométrique le complexe $z$ dans les cas suivants :

1. $z=1-\mathrm{i}$
2. $z=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
3. $z=-3\mathrm{i}$
4. $z=\sqrt{2}$
5. $z=2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$
6. $z=-3-3\sqrt{3}\mathrm{i}$

### ▶ Exercice n°13
Simplifier l'écriture de $z$ et en déduire son module et un de ses arguments dans les cas suivants :

1. $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$
2. $z=3\times\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$
3. $z=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$
4. $z=\left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$

5. $z=\left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2\times 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

**► Exercice n°14**

Écrire sous forme algébrique le complexe $z$ dans les cas suivants :

1. $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$
2. $z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$
3. $z=(1+i)\,e^{i\frac{\pi}{6}}$
4. $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}+\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

**► Exercice n°15**

Soit $z_1=1-i\sqrt{3}$ et $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

1. Écrire $z_1$ et $z_2$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de $\dfrac{1}{z_1}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$ et $(z_2)^{12}$.

**► Exercice n°16**

Soit $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

1. Déterminer le module et un argument de $z$.
2. En déduire la forme trigonométrique, puis la forme algébrique de $z^3$ et $z^{2013}$.

**► Exercice n°17**

Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

1. Déterminer le module et un argument de $z_1$ et $z_2$. En déduire le module et un argument de $z_1\cdot z_2$.
2. Calculer la forme algébrique de $z_1\cdot z_2$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

**► Exercice n°18**

Soit $z=\dfrac{(1+i)^3}{1+i\sqrt{3}}$.

1. Calculer sous forme algébrique $(1+i)^3$, puis $z$.
2. Mettre sous forme trigonométrique $1+i$, $1+i\sqrt{3}$, puis $z$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

**► Exercice n°19**

Écrire sous forme trigonométrique le complexe $z$ dans les cas suivants :

1. $z=3i\,e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $z=(1+i)^5$
3. $z=\dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

**► Exercice n°20**

Soit $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-\sqrt{3}+3i$ et $z_3=\dfrac{4\sqrt{3}\,z_2}{9z_1}$.

1. Déterminer le module et un argument exact de $z_1$, $z_2$ et $z_3$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A$ et $B$ d'affixes respectives $z_1$ et $z_2$.
   Montrer que le triangle $OAB$ est rectangle.
3. Montrer que le point $G$ d'affixe $z_3$ est aligné avec le milieu $I$ de $[AB]$ et l'origine $O$ du repère.

**► Exercice n°21**

Soit $z_1=-\sqrt{3}+i$ et $z_2=\overline{z_1}$.

1. Écrire les complexes $z_1$, $z_2$, $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$ sous forme trigonométrique.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ d'affixes respectives $z_1$, $z_2$, $(z_1)^2$ et $(z_2)^2$.
   Montrer que le triangle $AOD$ est rectangle et que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.

**► Exercice n°22**

Soit $a=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $b=\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^5$ et $c=\dfrac{6}{3+i\sqrt{3}}$.

1. Déterminer le module et un argument de $a$, $b$ et $c$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$ $b$ et $c$.
   Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.
3. Montrer que le triangle $OAC$ est équilatéral.

### ▶ Exercice n°23

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A$ d'affixe $z_A = 2+2\mathrm{i}$, $C$ d'affixe $z_C = -2\mathrm{i}$ et $M$ d'affixe $z$.

1. Déterminer l'ensemble $\Delta$ des points $M$ tels que $|z-(2+2\mathrm{i})| = |z+2\mathrm{i}|$.
2. Soit $B$ le point d'affixe $z_B = \dfrac{3+8\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$. Montrer que $B$ appartient à $\Delta$.

### ▶ Exercice n°24

À tout complexe $z = x+\mathrm{i}y$ ($x$ et $y$ réels), on associe $f(z) = \mathrm{i}z-2+3i$.

1. Calculer $f(\mathrm{i})$.
2. Calculer $f(z)$ lorsque $z$ est le complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = z$.
4. Calculer $X$ et $Y$ , les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de $x$ et $y$.
5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, montrer que l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur est une droite dont on donnera une équation.

### ▶ Exercice n°25

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A$ d'affixe $z_A = \left(1+\sqrt{2}\right)+\mathrm{i}$ et $B$ d'affixe $z_B = \left(1+\sqrt{2}\right)-\mathrm{i}$.

1. Montrer que $OA = OB$.
2. Montrer que $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$. En déduire le module et un argument de $\dfrac{z_B}{z_A}$.
3. Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

### ▶ Exercice n°26

À tout complexe $z \neq \mathrm{i}$ , on associe $Z = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

1. Montrer que si $z$ est réel alors $|Z| = 1$.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A$ d'affixe $z_A = \mathrm{i}$, $B$ d'affixe $z_B = -\mathrm{i}$ et $M$ d'affixe $z$.
   Montrer que si $|Z| = 1$ alors on a $AM = BM$ et $z$ réel.