Équations différentielles

▶ Exercice n°1

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y' + 0{,}1y = 0$
2. $3y' = 5y$
3. $y' - 8y = 5$
4. $2y + 3y' - 1 = 0$

▶ Exercice n°2

Dans un circuit, l'intensité $i(t)$ est telle que, pour tout $t \geqslant 0$:

$R\,i(t) + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U$ avec $U = 10\,\mathrm{V}$; $R = 5\,\Omega$ et $L = 1\,\mathrm{H}$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $R\,i(t) + L\,\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U$.
2. Sachant que de plus, on doit avoir $i(0) = 0$, déterminer la seule solution qui vérifie cette condition.

▶ Exercice n°3

On note $N(t)$, la vitesse de rotation angulaire (en tours par minute) à l'instant t (en minutes) d'un disque lorsque sa rotation est freinée par un certain liquide.
Sachant que N est la solution de l'équation différentielle $y' = -(\ln 100)y$ telle que $N(0) = 1500$:

1. En résolvant l'équation différentielle, déterminer $N(t)$.
2. Calculer la vitesse de rotation du disque à l'instant $t = 1$ minute.
3. Déterminer le temps nécessaire pour que la vitesse de rotation du disque ne soit plus qu'un tour par minute.
4. Calculer la valeur moyenne de la fonction N entre les instants $t = 0$ et $t = 1$.

▶ Exercice n°4

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 36y = 0$
2. $4y'' + 25y = 0$
3. $y'' = -\pi^2 y$

▶ Exercice n°5

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 16y = 0$.
2. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle précédente, qui vérifie les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.
3. Vérifier que, pour tout x, $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{8}\right]$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.

▶ Exercice n°6

Dans un circuit LC, la charge $q(t)$ est telle que, pour tout $t \geqslant 0$:

$q''(t) + \dfrac{1}{LC}q(t) = 0$ avec $C = 0{,}002\,\mathrm{F}$ et $L = 0{,}0125\,\mathrm{H}$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle : $q''(t) + \dfrac{1}{LC}q(t) = 0$.
2. Sachant que de plus, on doit avoir $q(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{400}$ et $q'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer la seule solution qui vérifie cette condition.
3. Montrer que cette solution q est telle que, pour tout t : $q(t) = \dfrac{1}{200} \times \sin\left(200t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.