Dérivation

▸ Exercice n°1

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{1}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+6}$ 6) $f(x) = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2}{x+1}$

7) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$ 8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$

9) $f(x) = (x+3)\sqrt{x}$ 10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}$

11) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \times \left(x^2 - 2\right)$ 12) $f(x) = (2x - \sin x) \times (x+4)$

▸ Exercice n°2

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{4x+8}$ 2) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

3) $f(x) = (3x-1)^2$ 4) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x + 4\right)^3$

5) $f(x) = \left(2x^2 + x - 1\right)^3$ 6) $f(x) = (2x+1)^3 - (4x-1)^2$

7) $f(x) = (\cos x)^3$ 8) $f(x) = (1 - 5\sin x)^3$

9) $f(x) = x \times \cos(2x)$ 10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x+2}}{x}$

▸ Exercice n°3

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

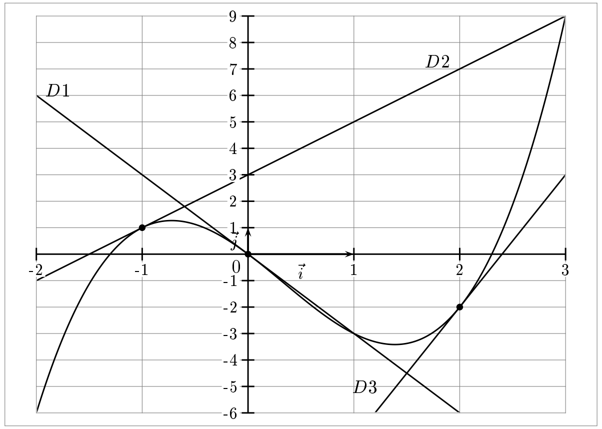
1) $f(x) = x^2 + 1 \quad a = 1$ 2) $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \quad a = 2$ 4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} \quad a = 4$

5) $f(x) = (4x-3)^3 \quad a = 1$

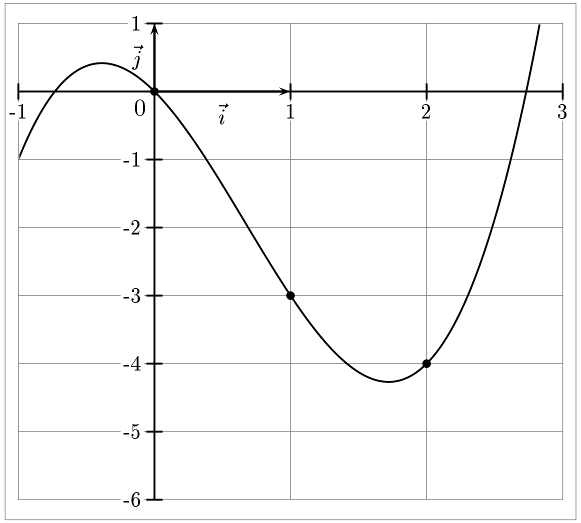
▸ Exercice n°4

Sur le graphique ci-dessous, $D1$, $D2$ et $D3$ représentent les tangentes de la courbe représnetative d'une fonction f aux points d'abscisses respectives 0, -1 et 2.
En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.



▸ Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur $[-1{,}3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$ dont la courbe est donnée ci-dessous. Construire sur le graphique les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, 1 et 2.



► Exercice n°6

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $\dfrac{x+1}{x-1}$.
Déterminer les points éventuels de la courbe de f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 et donner une équation de ces tangentes.

► Exercice n°7

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x}$.
Déterminer les points de la courbe représentative de f (dans un repère orthonormal) où la tangente :

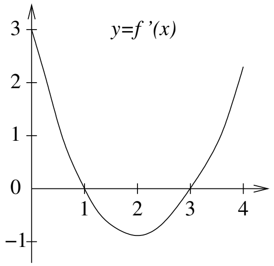
a) est horizontale.

b) admet -2 comme coefficient directeur.

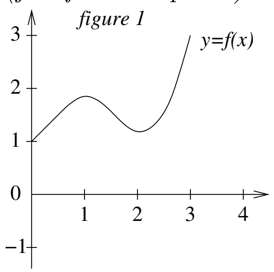
c) est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

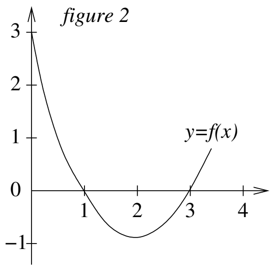
► Exercice n°8

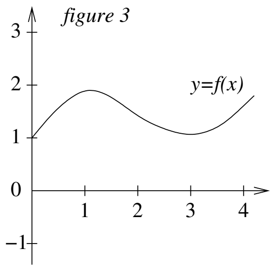
Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;\,4]$. La courbe représentative de **sa dérivée** est donnée ci-dessous :



Parmi les trois figures ci-dessous, laquelle peut représenter la fonction f ?
(justifier sa réponse)

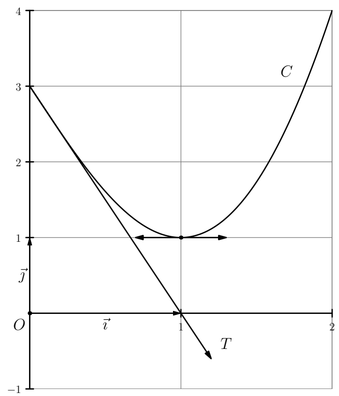






► Exercice n°9

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ et T représente la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



1. D'après la courbe, déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. D'après la courbe, dresser le tableau de variations de f.
3. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Donner $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$, $g'(0)$ et $g'(1)$.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Donner une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

► Exercice n°10

Déterminer les limites aux bornes et étudier les variations de la fonction f définie sur I dans les cas suivants :

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1 \quad I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 2}{2x-1} \quad I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

3) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+8} \quad I =]2\,;\,4[$

4) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \quad I = \mathbb{R}$

► Exercice n°11

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2+x+3}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les asymptotes à la courbe C_f.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice n°12

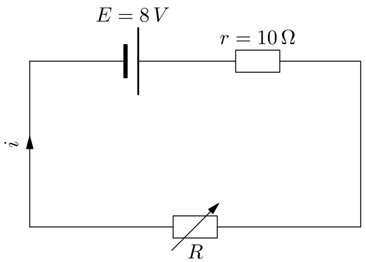
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{x^2-3x+2}{x^3}$.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Dériver f et montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4}$.
3. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
4. Soit D la droite d'équation $y = x - 1$.
   a) Montrer qu'il existe des points de C_f où la tangente est parallèle à D.
   b) Étudier la position relative de C_f et D.
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1)$.

▶ Exercice n°13

On considère le circuit ci-dessous dans lequel R est variable.



La puissance dissipée (en watts) dans le résistor de résistance R est :

$$P = \frac{E^2 \times R}{(R+r)^2} = \frac{64 \times R}{(R+10)^2}$$

Étudier les variations de P pour $R \in [0\,;\,+\infty[$.
En déduire la valeur de R pour laquelle la puissance dissipée P est maximale.

▶ Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,\pi]$ par $f(x) = \dfrac{(\cos x)^2}{1-\cos x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.
2. Dériver f et montrer que $f'(x) = \dfrac{(\sin x)\times(\cos x)\times(\cos x - 2)}{(1-\cos x)^2}$.
3. Compléter le tableau de variations de f ci-dessous :

x	0	π
$\sin x$		
$\cos x$		
$\cos x - 2$		
$(1-\cos x)^2$		
$f'(x)$		
$f(x)$		

▶ Exercice n°15

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Écrire la négation de la proposition suivante : « Pour tout $x \geqslant 2$, $f'(x) > 0$. »