Kit de survie - Troisième partie

9. Fonction exponentielle

a) Propriétés

- $y = \mathrm{e}^x \Leftrightarrow \ln y = x$
- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ et, si $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} = x$
- $\mathrm{e}^0 = 1$; $\mathrm{e}^1 = e$
- Pour tous réels a et b :

$\mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b = e^{a+b}$ $\qquad \dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$

$\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$ $\qquad (\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$

▶ *Exemples :*

- $\ln\left(\mathrm{e}^3\right) = 3$
- $\mathrm{e}^{\ln 5} = 5$
- $\mathrm{e}^{2\ln 3} = \mathrm{e}^{\ln(3^2)} = \mathrm{e}^{\ln 9} = 9$
- $\mathrm{e}^{-\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$
- $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}$
- $\mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{3x}$

b) Signe

- Pour tout x, e^x est **strictement positif**.

c) Équations et inéquations

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\mathrm{e}^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$
- $\mathrm{e}^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$
- $\mathrm{e}^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$
- $\mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a = b$
- $\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a < b$
- $\mathrm{e}^a \leqslant \mathrm{e}^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

▶ *Exemples :*

- $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$
- $3\mathrm{e}^{-x} = 6 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln 2 \Leftrightarrow x = -\ln 2$. $S = \{-\ln 2\}$
- $\mathrm{e}^{2x} > 1 \Leftrightarrow 2x > \ln 1 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. $S =]0\,;+\infty[$
- $\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3 = 0$:

On pose $X = \mathrm{e}^x$. L'équation devient $X^2 - 2X - 3 = 0$ (équation du second degré)
$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.
Deux racines : $X_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$.
Or, $\mathrm{e}^x = -1$ n'est pas possible et $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. D'où, $S = \{\ln 3\}$

d) Dérivées et exponentielles

- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\mathrm{e}^{-x})' = -\mathrm{e}^{-x}$
- $\left(\mathrm{e}^U\right)' = U'\mathrm{e}^U$

▶ *Exemples :*

- Si $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ alors $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$.
- Si $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ alors $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

e) Primitives et exponentielles

- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
- Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$.
- Une primitive de $U'\mathrm{e}^U$ est e^U.

▶ *Exemple :* Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{3x+4}$.
On pense à la forme $U'\mathrm{e}^U$ (dont une primitive est e^U) .
On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{3\,\mathrm{e}^{3x+4}}_{\text{forme exacte}}$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times \mathrm{e}^{3x+4}$.

10. Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

- Pour tous a et b de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

▶ *Exemple :*

$$\int_0^2 3+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \left[3x - \mathrm{e}^{-x}\right]_0^2 = \left(3 \times 2 - \mathrm{e}^{-2}\right) - \left(3 \times 0 - \mathrm{e}^0\right) = 6 - \mathrm{e}^{-2} - (-1) = 7 - \mathrm{e}^{-2}.$$

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour tous a, b et c de I :

- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Relation de Chasles)*
- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*

• Pour tout réel k, $\int_a^b (kf)(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*

• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

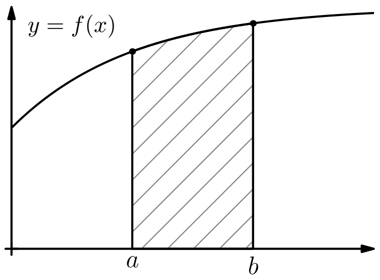
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$

• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Calculs d'aires

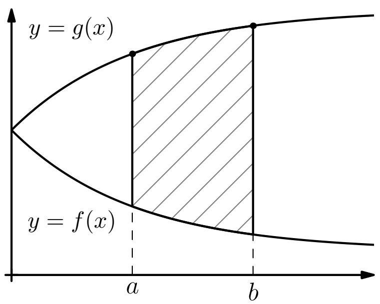
f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.

• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors **l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses** et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.



• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors **l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g** et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)



► **Remarques :**

• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) × (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).

• Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle :

Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$