Kit de survie - Deuxième partie

7. Logarithme népérien

a) Propriétés

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$
• $\ln 1 = 0$
• Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad\quad$ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ $\quad\quad$ $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$ (n entier)

$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

► *Exemples :*

$\ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$ $\quad\quad$ $\ln 25 = \ln\left(5^2\right) = 2\ln 5$

$\ln\left(\frac{9}{2}\right) = \ln 9 - \ln 2 = \ln\left(3^2\right) - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2$

b) Signe du logarithme

• Si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$ $\quad$ ($\ln x$ est strictement **négatif** sur $]0\,;1[$)
• Si $x > 1$ alors $\ln x > 0$ $\quad$ ($\ln x$ est strictement **positif** sur $]1\,;+\infty[$)

c) Nombre e

• e est l'unique réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$
• Pour tout entier n, $\ln\left(\mathrm{e}^n\right) = n$

d) Équations et inéquations

Pour tous réels a et b strictement positifs :

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ $\quad$ • $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ $\quad$ • $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$

Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► *Exemples :*
• $\ln(2x) = \ln 6$. Condition d'existence : $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
Avec cette condition :
$\ln(2x) = \ln 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$. $\quad S = \{3\}$
• $\ln(3x) = 4$. Condition d'existence : $3x > 0 \Leftrightarrow x > 0$
Avec cette condition :
$\ln(3x) = 4 \Leftrightarrow \ln(3x) = \ln\left(\mathrm{e}^4\right) \Leftrightarrow 3x = \mathrm{e}^4 \Leftrightarrow x = \frac{\mathrm{e}^4}{3}$. $\quad S = \left\{\frac{\mathrm{e}^4}{3}\right\}$
• $(\ln x)^2 - 5(\ln x) + 6 = 0$. Condition d'existence : $x > 0$
Avec cette condition :
On pose $X = x^2$. L'équation devient $X^2 - 5X + 6 = 0$ (équation du second degré)
$\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 6 = 1 > 0$. Deux racines : $X_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{5+1}{2} = 3$.
Or, $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2$ et $\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\mathrm{e}^3\right) \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^3$.
$S = \left\{\mathrm{e}^2;\mathrm{e}^3\right\}$
• $3 - \ln x \geqslant 0$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition : $3 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^3\right) \geqslant \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e}^3 \geqslant x$.
Comme de plus, il faut $x > 0$ on a $S = \left]0;\mathrm{e}^3\right]$

e) Dérivée de la fonction logarithme népérien

Pour tout $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Conséquence : une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction ln.

► *Exemple :* Si $f(x) = x\ln x$ alors $f'(x) = 1\times\ln x + x\times\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

f) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geqslant a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leqslant a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln\left(q^n\right) = n\ln q$.

► *Exemples :*
• Recherche du plus petit entier n tel que $5\times 2^n \geqslant 15000$:
$5\times 2^n \geqslant 15000 \Leftrightarrow 2^n \geqslant 3000 \Leftrightarrow \ln\left(2^n\right) \geqslant \ln(3000) \Leftrightarrow n\ln 2 \geqslant \ln 3000 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln 3000}{\ln 2}$
(car $\ln 2 > 0$). Or $\frac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11{,}55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.

• Recherche du plus petit entier n tel que $0{,}8^n \leqslant 0{,}01$:

$0{,}8^n \leqslant 0{,}01 \Leftrightarrow \ln\left(0{,}8^n\right) \leqslant \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\ln 0{,}8 \leqslant \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}$ (car $\ln 0{,}8 < 0$).

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8} \approx 20{,}64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

8. Suites numériques

a) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + r$; $U_n = U_0 + nr$; $U_n = U_p + (n-p)r$
• Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$.

b) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
• Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{1er terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$
(pour $q \neq 1$)
• Si le premier terme est positif et si $q > 1$ alors la suite géométrique de raison q est croissante.
• Si le premier terme est positif et si $0 < q < 1$ alors la suite géométrique de raison q est décroissante.

► *Exemple :* Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$. *(attention : le nb de termes est égal à 9)*
La suite (U_n) est croissante car $U_0 > 0$ et $q > 1$.

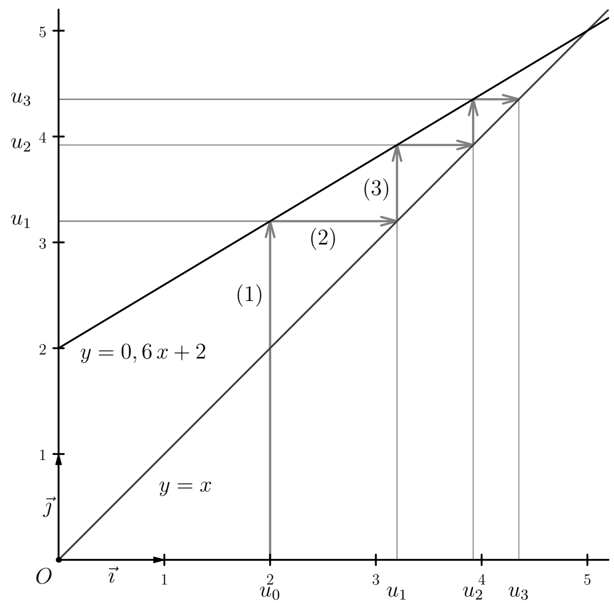
c) Limite de q^n avec $q > 0$

• si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
• si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

► *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} (1{,}15)^n = +\infty$ car $1{,}15 > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

d) Suites arithmético-géométriques : $U_{n+1} = aU_n + b$

► *Exemple :* Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 0{,}6\,U_n + 2$.
a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
On trace d'abord la droite D d'équation $y = 0{,}6\,x + 2$ et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la droite D correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .
Pour déterminer $U_2 = f\left(U_1\right)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la droite D d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...



b) Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 5$ est géométrique.

Méthode générale :

- on calcule $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ en exprimant V_n et V_{n+1} en fonction de U_n et de U_{n+1} :
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5}$
- on remplace alors U_{n+1} par ce qu'indique la définition de la suite (U_n) :
$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{U_{n+1}-5}{U_n-5} = \dfrac{0{,}6\,U_n+2-5}{U_n-5}$
- on simplifie le numérateur et on le factorise par le coefficient devant U_n :
$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{U_{n+1}-5}{U_n-5} = \frac{0{,}6\,U_n+2-5}{U_n-5} = \frac{0{,}6\,U_n-3}{U_n-5} = \frac{0{,}6\left(U_n-\frac{3}{0{,}6}\right)}{U_n-5}$$
$$= \frac{0{,}6\,(U_n-5)}{U_n-5} = 0{,}6$$

Pour tout n, on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = 0{,}6$. Cela prouve bien que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}6$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 5 = 2 - 5 = -3$.

c) En déduire l'expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

Pour tout n, $V_n = q^n \times V_0 = -3\,(0{,}6)^n$.

$V_n = U_n - 5 \Leftrightarrow U_n = V_n + 5 = -3\,(0{,}6)^n + 5$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -3\underbrace{(0{,}6)^n}_{\to 0}+5 = 5$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}6)^n = 0$ car $0 < 0{,}6 < 1$).

e) Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -3\,(0{,}6)^{n+1} + 5 - \left[-3\,(0{,}6)^n + 5\right] = -3\,(0{,}6)^{n+1} + 3\,(0{,}6)^n$
$= 3\,(0{,}6)^n \times [-0{,}6+1] = 3\,(0{,}6)^n \times 0{,}4 = 1{,}2\,(0{,}6)^n$.

Le résultat étant positif pour tout n, on en déduit que (U_n) est croissante.

f) Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n > 4{,}997$.

$U_n > 4{,}997 \Leftrightarrow -3\,(0{,}6)^n + 5 > 4{,}997 \Leftrightarrow -3\,(0{,}6)^n > -0{,}003 \Leftrightarrow 0{,}6^n < 0{,}001$

$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}6^n\right) < \ln(0{,}001) \Leftrightarrow n\ln(0{,}6) < \ln(0{,}001) \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)}$ (car $\ln(0{,}6) < 0$).

Or, $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)} \approx 13{,}5$. Le plus petit entier qui convient est donc 14.

g) Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$ et en déduire $U_0 + U_1 + \cdots + U_9$.

(V_n) est géométrique.

Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_9 = V_0 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{10}}{1-0{,}6} = -3 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{10}}{0{,}4} \approx -7{,}45$.

Pour tout n, $U_n = V_n + 5$. Donc, $U_0 + U_1 + \cdots + U_9 = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_9 + 5$
$= V_0 + V_1 + \cdots + V_9 + 50 \approx 42{,}55$.

h) Déterminer l'expression de $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

$S_n = V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_n + 5 = V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 5(n+1)$.

Or (V_n) est géométrique.

Donc, $V_0 + V_1 + \cdots + V_n = V_0 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{n+1}}{1-0{,}6} = -3 \times \dfrac{1-(0{,}6)^{n+1}}{0{,}4}$

$= -7{,}5 \times \left(1-(0{,}6)^{n+1}\right)$.

D'où, $S_n = -7{,}5 \times \left(1-(0{,}6)^{n+1}\right) + 5(n+1)$.