Kit de survie - Première partie

1. Pourcentages

Prendre x % d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

▶ *Exemple :* 5 % de 640 $= \frac{5}{100} \times 640 = 32$

Pour déterminer la proportion en pourcentage d'une partie A par rapport à un total B, il suffit de calculer $\frac{A}{B} \times 100$.

▶ *Exemple :* La proportion en pourcentage de 18 par rapport à 120 est égale à 15%, car $\frac{18}{120} \times 100 = 15$.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.
Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

▶ *Exemples :*
- augmenter une valeur de 20 % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1{,}2$.
- le prix d'un produit valant 15 euros après une baisse de 6 % est égal à $\left(1 - \frac{6}{100}\right) \times 15 = 0{,}94 \times 15 = 14{,}1$ euros.
- Diminuer une grandeur de 15 %, puis l'augmenter de 20 % revient à la multiplier par : $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0{,}85 \times 1{,}2 = 1{,}02$.

(Rappel : les pourcentages ne s'ajoutent pas lors d'évolutions successives)

▶ **Remarque :**

• Si on augmente à intervalles réguliers une grandeur de x % , on peut modéliser l'évolution de la grandeur par une suite géométrique de raison $1 + \frac{x}{100}$.

• Si on diminue à intervalles réguliers une valeur de x % , on peut modéliser l'évolution de la grandeur par une suite géométrique de raison $1 - \frac{x}{100}$.

Pour déterminer la variation d'une grandeur en pourcentage, il suffit de calculer :
$$\frac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$$

▶ *Exemple :* Un produit passant de 64 à 72 euros subit une hausse de 12,5%, car $\frac{72-64}{64} \times 100 = 12{,}5$.

2. Probabilités

a) Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :

• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.

• Un événement A est une partie de l'univers.

• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.

• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.

• L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.

• L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.

• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

• Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.

• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

• $p(\varnothing) = 0$; $p(\Omega) = 1$

• Pour tous événements A et B :

$0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)

• Dans le cas de l'équiprobabilité :
$$p(A) = \frac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$$

▶ *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes :

p(la carte tirée est un roi) $= \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

p(la carte tirée est un cœur) $= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

p(la carte tirée est un roi <u>et</u> un cœur) $= \frac{1}{32}$

p(la carte tirée est un roi <u>ou</u> un cœur) $= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$

b) Probabilités conditionnelles

Définition

Étant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω, on appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

Propriétés

Pour tous événements non vides A et B :

• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$

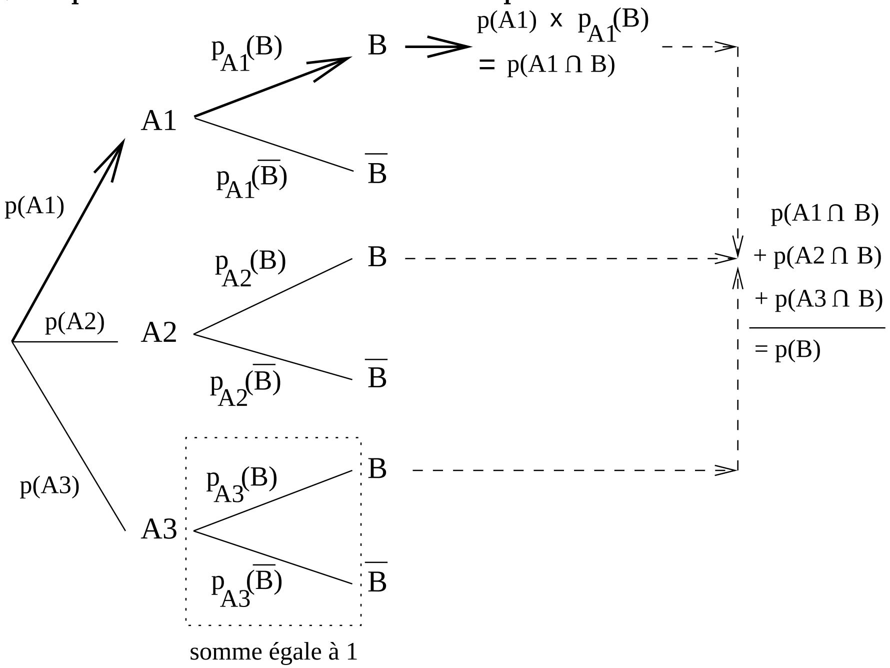
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$

• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :
• $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

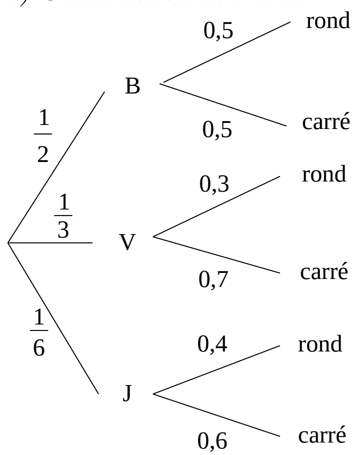
▶ **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



▶ **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
• Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

▶ *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?
La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0{,}5$.
c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?
$p(R) = \frac{1}{2} \times 0{,}5 + \frac{1}{3} \times 0{,}3 + \frac{1}{6} \times 0{,}4 = \frac{5}{12}$.
d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?
$p_R(B) = \frac{p(B \cap R)}{p(R)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0{,}5}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$.

c) Indépendance en probabilité

DÉFINITION

• Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
• Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

d) Loi numérique associée à une expérience aléatoire

On considère une expérience aléatoire où à chaque résultat possible on peut associer un réel X. On note x_i les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i .
• Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
• Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
$E(X)$ représente la valeur moyenne de X si on répète l'expérience aléatoire un grand nombre de fois.

▶ *Exemple :* On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un « 1 » ou un « 6 » et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.
On a $p(X=-2)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ et $p(X=6)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{3}$

$E(X)=\dfrac{2}{3}\times(-2)+\dfrac{1}{3}\times 6=\dfrac{2}{3}$ *(gain moyen si on joue un grand nombre de fois)*

e) Loi binomiale

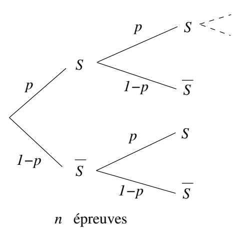
DÉFINITION

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

▶ *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer le dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .
Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n« $(1\leqslant n\leqslant 6)$, ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

▶ **Remarques :**
• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès«) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).
• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre) et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

PROPRIÉTÉ



Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Probabilité d'obtenir k succès** (avec $0\leqslant k\leqslant n$) : $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
(Le coefficient $\binom{n}{k}$ s'obtient avec la calculatrice : n **`nCr`** *k)*
• **Probabilité de n'obtenir aucun succès** : $p(X=0)=(1-p)^n$
• **Probabilité de n'obtenir que des succès** : $p(X=n)=p^n$
• **Probabilité d'obtenir au moins un succès** : $p(X\geqslant 1)=1-p(X=0)$
la probabilité d'obtenir au moins un succès = 1− (la probabilité de n'obtenir aucun succès)
• **Espérance de X** : $E(X)=np$

▶ *Exemple :*
Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».
X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{1}{6}$.
La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^4$.
La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$
L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np=\frac{7}{6}$.

3. Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Signe de $ax+b$ $\quad(a\neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $(-a)$	0	signe de a

b) Signe de ax^2+bx+c $\quad(a\neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta=b^2-4ac$ (sauf cas évidents)
• Si $\Delta<0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

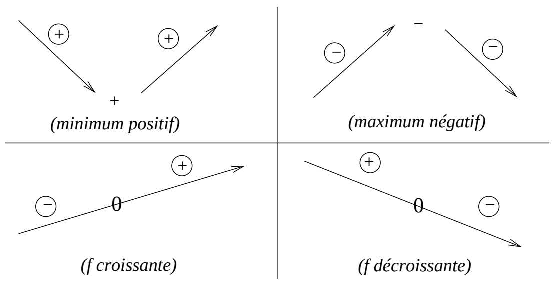
• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

c) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



4. Étude de fonctions

a) Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :
• si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
• si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

b) Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$
$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$
$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	

• Opérations sur les fonctions dérivables :

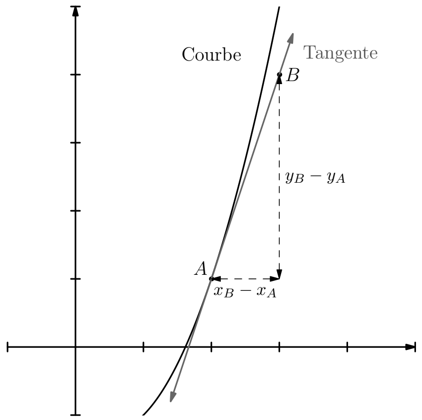
Fonction	**Fonction dérivée**
$f + g$	$f' + g'$
$k\,f \quad (k$ réel$)$	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$

Fonction	**Fonction dérivée**
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

c) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$
(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$.

• **Détermination graphique de $f'(a)$ à partir de la tangente au point A d'abscisse a :**
Si B est un autre point de la tangente, on a $f'(a) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



d) Équation $f(x) = k$

• Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et si k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans $[a\,;\,b]$.
• Pour déterminer une valeur approchée de x_0, on utilise la méthode du « balayage »(à l'aide de la calculatrice)

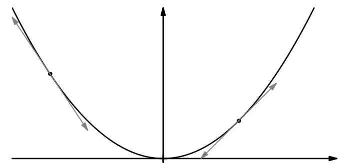
▶ *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $I = [1{,}2]$ car f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur I.
De plus 5 est compris entre $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution x_0 dans $[1{,}2]$.
Recherche une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	**1,6**	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	2	2,43	2,93	3,50	4,14	**4,87**	**5,70**				

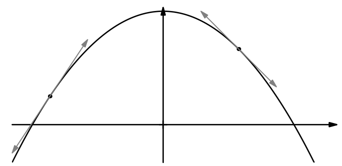
On a arrêté les calculs après 1,6 car $f(1{,}5) < 5 < f(1{,}6)$. On peut donc en déduire que : $1{,}5 < x_0 < 1{,}6$. Une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près est 1,5 et une valeur approchée de x_0 **par excès** à 10^{-1} près est 1,6.

e) Convexité

Étant donné une fonction f dérivable sur un intervalle I.
• f est dite **convexe** sur I si sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes.



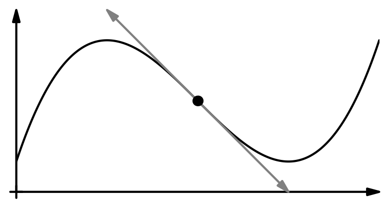
Dire que f est convexe sur I équivaut à dire que la dérivée f' est croissante sur I.
• f est dite **concave** sur I si sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Dire que f est concave sur I équivaut à dire que la dérivée f' est décroissante sur I.

Propriété

Étant donné une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle $]a;b[$.
• Si, pour tout x de $]a;b[$, $f''(x) \geqslant 0$ alors f est convexe sur $]a;b[$.
• Si, pour tout x de $]a;b[$, $f''(x) \leqslant 0$ alors f est concave sur $]a;b[$.
• Si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en un point x_0 de $]a;b[$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion en x_0 (la courbe traverse la tangente en ce point).



▶ *Exemple :* Soit f définie par $f(x) = x^3$.
Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
f est convexe sur $]0\,;+\infty[$ car $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
f est concave sur $]-\infty\,;0[$ car $f''(x) < 0$ pour tout $x < 0$.
f admet un point d'inflexion en 0 car f'' s'annule pour $x = 0$ en changeant de signe.

5. Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x) = 3x^2(x^3+5) \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x^3+5)^2}{2}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{x^3+1}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

▶ *Exemple :* Soit f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(3x+6)^2}$.

On pense à la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $\dfrac{-1}{U}$) .

On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{\dfrac{3}{(3x+6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-1}{(3x+6)}$.

6. Racine $n^{\text{ième}}$ de a $(a > 0)$

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier $n > 1$: $\sqrt[n]{a}$ est l'unique nombre positif tel que $(\sqrt[n]{a})^n = a$ et on a $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

▶ *Exemple :* Un chiffre d'affaires qui augmente de 50% sur une année est multiplié par 1,5 entre le début et la fin de l'année.

Or multiplier une grandeur par 1,5 sur 12 mois revient à la multiplier par $\sqrt[12]{1{,}5}$ chaque mois pendant 12 mois.

Comme $\sqrt[12]{1{,}5} = 1{,}5^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}034$, on peut affirmer qu'augmenter le chiffre d'affaires de 50% sur un an revient à l'augmenter d'environ 3,4% par mois pendant 12 mois.