1. Rappels sur la loi binomiale

Définition

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple :* Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer notre dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli) .

► **Remarque :**

• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès«) et $\overline{S}$. La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1-p)$).

Propriété

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.

Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.

• **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X=k)=\binom{n}{k}\,p^k\,(1-p)^{n-k}$ (k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)

• **Probabilité de n'obtenir que des succès** : $p(X=n)=p^n$

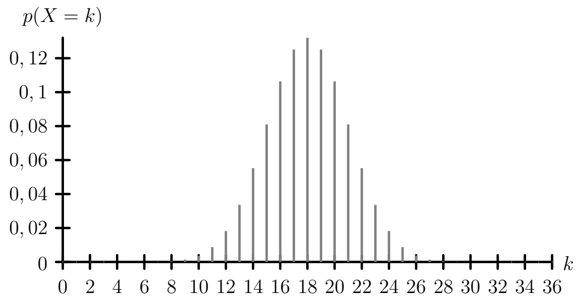
• **Probabilité de n'obtenir aucun succès** : $p(X=0)=(1-p)^n$

• **Probabilité d'obtenir au moins un succès** : $1-p$(aucun succès)

• **Espérance de X** : $E(X)=np$

Calcul des coefficients $\binom{n}{k}$: TI : n `MATH` → `PROB` → `3: Combinaison` k ; CASIO : `OPT` → `PROB` n `nCr` k

► *Exemple :* On lance 36 fois de suite une pièce et on note X le nombre de « pile » obtenus.
X suit la loi binomiale de paramètres $n=$ ☐ et $p=$ ☐ dont la représentation graphique est :



a) La probabilité d'obtenir exactement 10 fois « pile » est égale à ☐ .

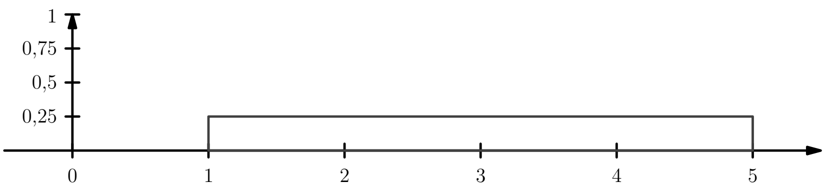
b) La probabilité de n'obtenir que des « pile » est égale à ☐ .

c) L'espérance de X (nombre moyen de « pile » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égal à ☐ .

2. Loi uniforme

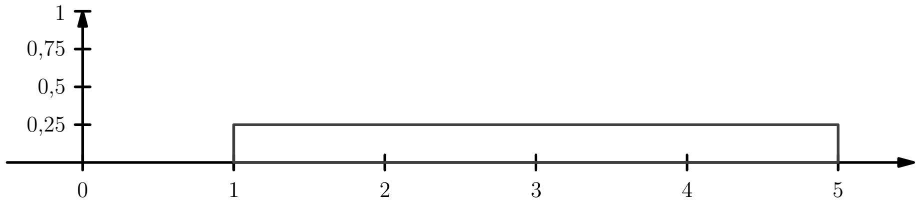
a) Exemple introductif

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un réel au hasard (noté X) dans l'intervalle $[1\,;\,5]$ (on admet que tous les réels sont uniformément répartis) et le rectangle ci-dessous de hauteur $\frac{1}{4}$.

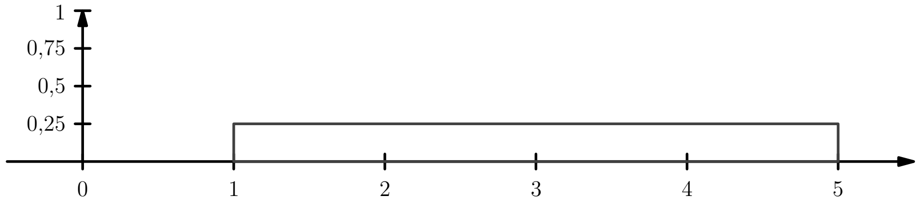


Intuitivement, on peut estimer que :

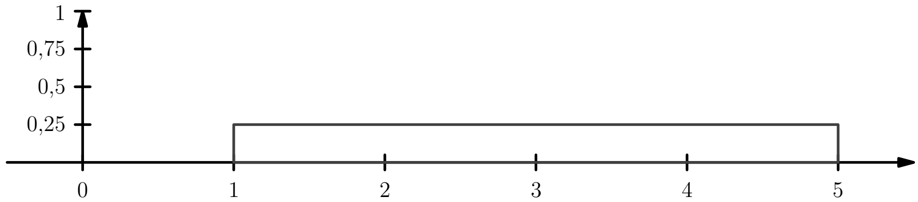
- $p\,(1 \leqslant X \leqslant 5) = \boxed{\quad\quad}$, ce qui correspond à l'aire de la zone hachurée :



- $p\,(1 \leqslant X \leqslant 3) = \boxed{\quad\quad}$, ce qui correspond à l'aire de la zone hachurée :



- $p\,(4 \leqslant X \leqslant 5) = \boxed{\quad\quad}$, ce qui correspond à l'aire de la zone hachurée :



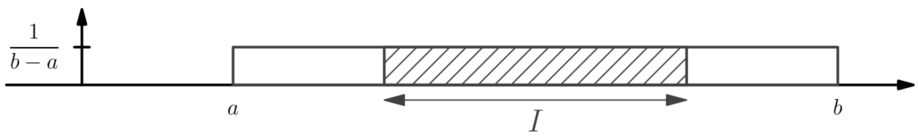
Par contre, comme il y a une infinité de réels dans l'intervalle $[1\,;\,5]$, on est « obligé » de considérer que :
$p\,(X = 2) = \boxed{\quad\quad}$ et $p\,(X = 4) = \boxed{\quad\quad}$.

On dit que X suit $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$.

b) Cas général

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ lorsque pour tout intervalle I, inclus dans $[a\,;\,b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.



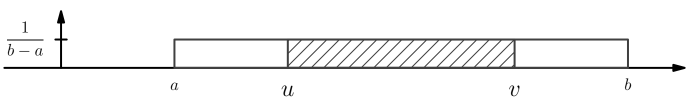
On peut considérer que $p\,(X \in I) = \displaystyle\int_{x \in I} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$. (« aire sous la courbe »)

La fonction f définie sur $[a\,;\,b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée **fonction de densité** de la loi uniforme sur $[a\,;\,b]$.

Propriété

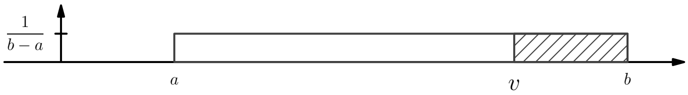
- Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors pour tous réels u et v inclus dans $[a\,;\,b]$, on a :

$$p\,(u \leqslant X \leqslant v) = \frac{v-u}{b-a}$$

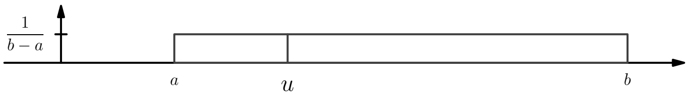


$$p\,(X \leqslant u) = p\,(a \leqslant X \leqslant u) = \frac{u-a}{b-a}$$

$p\,(X \geqslant v) = p\,(v \leqslant X \leqslant b) = \dfrac{b-v}{b-a}$



$p\,(X = u) = 0$



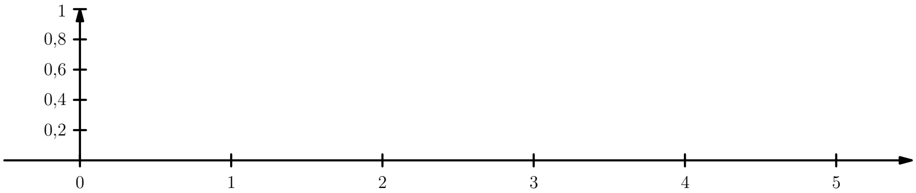
(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a\,;\,b]$ alors **l'espérance** de X est égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

► **Remarque :** les calculatrices et divers logiciels fournissent une fonction « random() » (ou « ALEA() ») qui permet d'obtenir un nombre pseudo-aléatoire compris entre 0 et 1. Pour simuler le tirage au hasard d'un réel dans $[a\,;\,b]$, on peut utiliser $a + (b-a) * \text{random}()$.

► *Exemple :* Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0\,;\,5]$.

1. Préciser et représenter ci-dessous la fonction de densité de cette loi.



2. Calculer les probabilités suivantes :

a) $p\,(1 \leqslant X \leqslant 3) =$ $\boxed{}$.

b) $p\,(X \geqslant 3) =$ $\boxed{}$.

c) $p\,(X \leqslant 4) =$ $\boxed{}$.

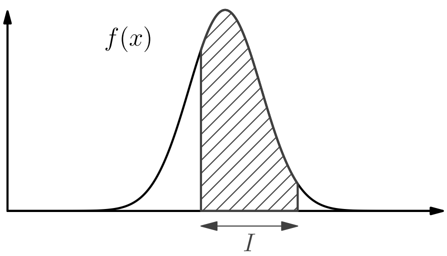
d) $p\,(X \leqslant 1 \text{ ou } X \geqslant 4) =$ $\boxed{}$.

3. Loi normale

a) Cas général

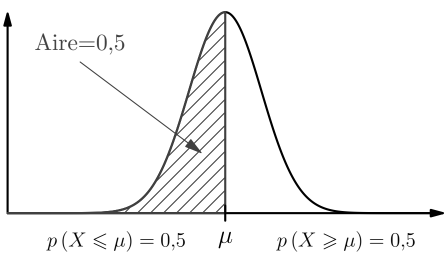
DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ (f est appelée fonction de densité de la loi normale).



La loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ est notée $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

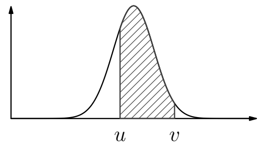
► **Remarque :** L'aire totale sous la courbe est égale à 1 et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ. On a donc la situation suivante :



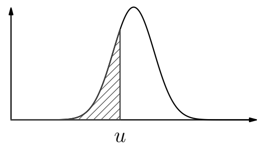
Propriété

• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance** μ **et d'écart-type** σ alors pour tous réels α et β, on a :

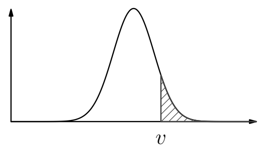
$p\,(u \leqslant X \leqslant v) =$
TI : DISTR (2nd+VARS) ; `normalcdf` (u,v,μ,σ)
CASIO : Menu STAT ; DIST ; NORM ; NCD avec
Lower : u ; Upper : v ; σ : σ ; μ : μ



$p\,(X \leqslant u) =$
TI : `normalcdf` $(-10^{99},u,\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : -10^{99} ; Upper : u ; σ : σ ; μ : μ



$p\,(X \geqslant v) =$
TI : `normalcdf` $(v,10^{99},\mu,\sigma)$
CASIO : NCD avec
Lower : v ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ

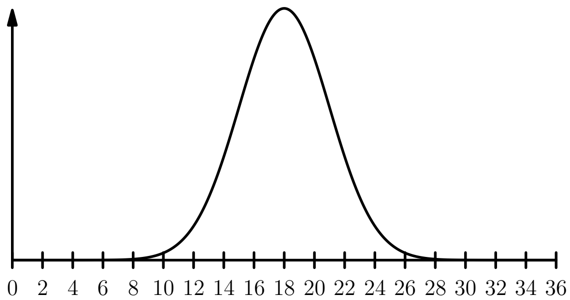


• **Valeurs remarquables :**
$p\,(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}68$
$p\,(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}95$
$p\,(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$

► *Exemple 1:* (pour tester sa calculatrice)
Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :
$p\,(52 \leqslant X \leqslant 64) \approx 0{,}682689$; $p\,(X \leqslant 55) \approx 0{,}308538$; $p\,(X \geqslant 62) \approx 0{,}252493$

► *Exemple 2:* Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.
$p\,(11{,}9 \leqslant X \leqslant 12{,}2) = \boxed{\qquad\qquad}$, donc $\boxed{\qquad\qquad}$ % des tubes sont acceptés par le client.

► *Exemple 3:* La fonction de densité de la loi normale d'espérance $\mu = 18$ et d'écart-type $\sigma = 3$ est représentée ci-dessous :



1. Donner, sans utiliser la calculatrice, $p\,(X < 18)$. $p\,(X < 18) = \boxed{\qquad}$.

2. Représenter graphiquement la probabilité de l'événement $p\,(X \leqslant 20)$ et calculer sa valeur.
   $p\,(X \leqslant 20) = \boxed{\qquad\qquad}$.

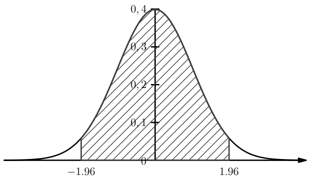
3. En déduire la probabilité de l'événement $p\,(X > 20)$.
   $p\,(X > 20) = \boxed{\qquad\qquad}$.

► *Exemple 4:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p\,(X < 2) = 0{,}067$ et $p\,(X < 3) = 0{,}159$.
On peut en déduire que $p\,(X > 2) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$
et $p\,(2 < X < 3) = \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$.

b) Cas particulier : la loi normale centrée réduite

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si elle suit la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 1$. La fonction de densité f est alors définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0,5x^2}$.

La loi normale centrée réduite est notée $\mathcal{N}(0;1)$. On a alors $p\,(-1{,}96 < X < 1{,}96) = 0{,}95$:



Dire que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ équivaut à dire que la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

4. Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

Propriété

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p. Si on prélève, avec remise, des échantillons de taille n dans cette population alors la probabilité que la proportion f du caractère au sein de ces échantillons appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\, p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

se rapproche de 95% quand n devient grand.

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique à 95%** associé à la proportion p.

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est** p. Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée** f du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien** p (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question.

a) L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est :

b) Donc on peut l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

Propriété

On cherche à connaitre une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f.

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est :