Suites

▶ Exercice n°1

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + 4\times 1.05^n$

▶ Exercice n°2

On considère l'algorithme AlgoBox ci-dessous :

```
 1: VARIABLES
 2: U EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: i EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: DEBUT_ALGORITHME
 5:   U PREND_LA_VALEUR 50
 6:   POUR i ALLANT_DE 1 A 10
 7:     DEBUT_POUR
 8:     U PREND_LA_VALEUR U+3
 9:     FIN_POUR
10:   AFFICHER U
11: FIN_ALGORITHME
```

1. Compléter les phrases ci-dessous :
   - Quand i vaut 1 et que la ligne 8 est exécutée, la variable U a pour nouvelle valeur ....
   - Quand i vaut 2 et que la ligne 8 est exécutée, la variable U a pour nouvelle valeur ....
   - Quand i vaut 3 et que la ligne 8 est exécutée, la variable U a pour nouvelle valeur ....
2. Quelle est la valeur affichée lors de l'exécution de la ligne 10 de l'algorithme ?
3. Compléter la phrase suivante :
   L'algorithme affiche le 11$^{\text{ième}}$ terme d'une suite .... de premier terme $U_0 = 50$ et de raison ....

▶ Exercice n°3

Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 10$.

1. Calculer U_2 et U_8.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ Exercice n°4

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec intérêts simples.
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Quel est le montant des intérêts que rapporte ce placement chaque année ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 15 ans.

▶ Exercice n°5

On considère l'algorithme AlgoBox ci-dessous :

```
 1: VARIABLES
 2: U EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: i EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: DEBUT_ALGORITHME
 5:   U PREND_LA_VALEUR 3
 6:   POUR i ALLANT_DE 1 A 5
 7:     DEBUT_POUR
 8:     U PREND_LA_VALEUR 2*U
 9:     FIN_POUR
10:   AFFICHER U
11: FIN_ALGORITHME
```

1. Compléter les phrases ci-dessous :
   - Quand i vaut 1 et que la ligne 8 est exécutée, la variable U a pour nouvelle valeur ....
   - Quand i vaut 2 et que la ligne 8 est exécutée, la variable U a pour nouvelle valeur ....
   - Quand i vaut 3 et que la ligne 8 est exécutée, la variable U a pour nouvelle valeur ....
2. Quelle est la valeur affichée lors de l'exécution de la ligne 10 de l'algorithme ?
3. Compléter la phrase suivante :
   L'algorithme affiche le ......$^{\text{ième}}$ terme d'une suite ....
   de premier terme $U_0 = 3$ et de raison ....

▶ Exercice n°6

Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer U_2 et U_5.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (U_n) .
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n > 10\,000$.

5. Calculer $U_0 + U_1 + \cdots + U_8$

▶ Exercice n°7

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ telle que $U_4 = 1$.

1. Calculer U_0, puis U_7.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (U_n) .
4. Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n < 0{,}00001$.
5. On note (S_n) la suite définie par $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$ (pour $n \geqslant 1$).
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (U_n) .

▶ Exercice n°8

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $U_4 = 10$ et $U_6 = 250$.
Calculer la raison q et U_0.

▶ Exercice n°9

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^7 + 3^8$
2. $S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{128}$

▶ Exercice n°10

On tire n fois avec remise une carte dans un jeu de 32 cartes et on note X le nombre d'as obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On note p_n la probabilité de n'obtenir aucun as lors de ce tirage de n cartes.
   a) Exprimer p_n en fonction de n.
   b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ?
   c) Déterminer le sens de variation et la limite de la suite (p_n).
3. On note q_n la probabilité d'obtenir au moins un as lors de ce tirage de n cartes.
   a) Exprimer q_n en fonction de n.
   b) Déterminer la limite de la suite (q_n).
   c) Déterminer le nombre minimum n de cartes qu'il faut tirer afin que la probabilité d'obtenir au moins un as soit supérieure à 0,99.

▶ Exercice n°11

On place un capital $U_0 = 8000$ euros à 3 % par an avec intérêts composés.
On note U_n le capital obtenu au bout de n années.

1. Comment passe-t-on de la valeur du capital d'une année à celle de l'année suivante ?
2. Donner la nature et la raison de la suite (U_n).
3. Exprimer U_n en fonction de n.
4. Calculer la valeur du capital au bout de 8 ans.
5. Au bout de combien d'années la valeur du capital aura-t-elle doublé ?

▶ Exercice n°12

Une plaque de verre teintée est telle qu'un rayon lumineux qui la traverse perd 20 % de son intensité lumineuse et on fait traverser à un rayon lumineux d'intensité 50 cd une série de ces plaques de verre teintée.
On note $I_0 = 50$ et I_n l'intensité du rayon lumineux après le passage de n plaques.

1. Justifier que la suite (I_n) est géométrique et donner sa raison.
2. Exprimer I_n en fonction de n.
3. Calculer l'intensité du rayon lumineux après le passage de 4 plaques.
4. On cherche à déterminer le plus petit nombre de plaques que le rayon lumineux doit franchir pour que son intensité devienne inférieure à 1 cd.
   a) **Méthode 1 : avec un algorithme**.
   Compléter la ligne 7 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il réponde à la question.

```
1:  VARIABLES
2:  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3:  I EST_DU_TYPE NOMBRE
4:  DEBUT_ALGORITHME
5:    n PREND_LA_VALEUR 0
6:    I PREND_LA_VALEUR 50
7:    TANT_QUE (.........) FAIRE
8:      DEBUT_TANT_QUE
9:      I PREND_LA_VALEUR 0.8*I
10:     n PREND_LA_VALEUR n+1
11:     FIN_TANT_QUE
12:   AFFICHER n
13: FIN_ALGORITHME
```

   b) **Méthode 2 : en résolvant une inéquation**.
   Déterminer, par le calcul, le plus entier n tel que $I_n \leqslant 1$.

▶ Exercice n°13

Une source sonore émet un son d'intensité $U_0 = 100$ décibels. On note U_n l'intensité du son après la traversée de n plaques d'isolation phoniques qui absorbent, pour chacune d'entre elles, 10 % de l'intensité du son qui lui parvient.

1. Justifier que (U_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
4. Déterminer le nombre minimal de plaques d'isolation phonique qu'il faut traverser pour que l'intensité du son soit inférieure à 1 décibels.

▶ Exercice n°14

Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = 6 + 2U_n$ et $U_0 = 1$.

1. Calculer U_1 et U_2.
2. Compléter la ligne 10 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il permette de calculer U_n après avoir entré n.

```
 1: VARIABLES
 2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: U EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: i EST_DU_TYPE NOMBRE
 5: DEBUT_ALGORITHME
 6:   U PREND_LA_VALEUR 1
 7:   LIRE n
 8:   POUR i ALLANT_DE 1 A n
 9:     DEBUT_POUR
10:     U PREND_LA_VALEUR .........
11:     FIN_POUR
12:   AFFICHER U
13: FIN_ALGORITHME
```

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + 6$.
   a) Calculer V_0, V_1 et V_2.
   b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   c) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
   d) Déterminer le sens de variation de la suite (U_n).
   e) Déterminer la limite de la suite (U_n).
   f) Déterminer le plus petit entier n tel que $U_n > 10\,000$.

▶ Exercice n°15

L'algorithme ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
U EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 25
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR 0.9*U+2
    FIN_POUR
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et donner la valeur de U_0.
2. Calculer U_1 et U_2.
3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 20$.
   a) Calculer V_0, V_1 et V_2.
   b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   c) En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
   d) Calculer U_{10}.
   e) Déterminer la limite de la suite (U_n).

▶ Exercice n°16

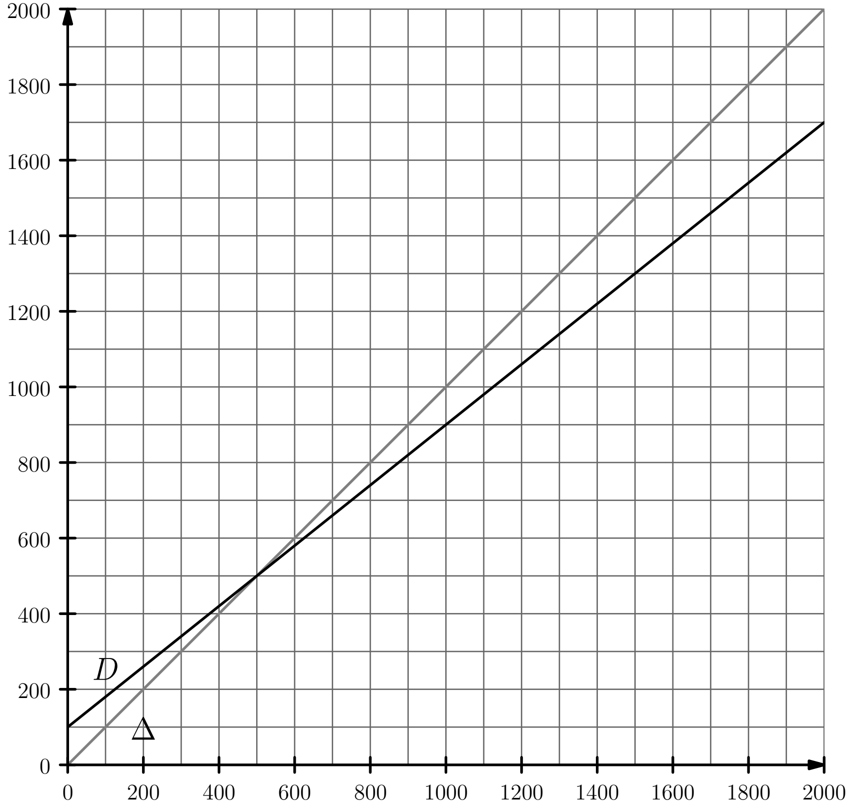
Pour s'abonner à un club d'équitation, il faut verser une cotisation annuelle initiale de 210 euros qui augmente de 5 % par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, le club de sport effectue une réduction de 10 euros sur la cotisation annuelle. On note $U_0 = 210$ et U_n le montant en euros de la cotisation annuelle de la $(n+1)$ième année.

1. Expliquer pourquoi on a pour tout n, $U_{n+1} = 1{,}05 \times U_n - 10$.
2. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 200$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme V_0 et la raison.
3. Déterminer V_n en fonction de n.
4. Calculer $V_0 + V_1 + \cdots + V_9$.
5. Déterminer U_n en fonction de n.
6. Déterminer la somme totale versée au club de sport par un membre pendant les 10 premières années

▸ Exercice n°17

Le 1er janvier 2013, une entreprise compte $U_0 = 2000$ employés. A partir de l'année 2013, 20% de l'effectif partira à la retraite chaque année et l'entreprise embauchera 100 jeunes par an pour compenser ces départs. On note U_n le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Expliquer pourquoi on a pour tout n, $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n + 100$.
2. Sur le graphique ci-dessous figurent la droite D d'équation $y = 0{,}8x + 100$ et la droite Δ d'équation $y = x$.



   Construire sur le graphique U_1, U_2, U_3 et U_4.
3. Déterminer le réel a tel que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - a$ soit une suite géométrique de raison 0,8.
4. Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.
5. Quel sera le nombre d'employés le 1er janvier 2018 ?
6. Calculer $U_{n+1} - U_n$ et montrer que, pour tout n, $U_{n+1} - U_n = -300 \times 0{,}8^n$.
7. En déduire le sens de variation de la suite (U_n).
8. Déterminer la limite de la suite (U_n).
9. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'employés sera inférieur à 600.

▸ Exercice n°18

Un ouvrier embauché dans une entreprise le 1er Janvier 2013 se voit offrir la première année un salaire annuel de $U_0 = 20000$ euros. Le contrat du travail de l'ouvrier prévoit l'attribution annuelle d'une prime de 80 euros et que son salaire (prime comprise) augmente chaque année de 2%. On note U_n le salaire annuel reçu par ce salarié pendant l'année $2013 + n$.

1. Expliquer pourquoi on a pour tout n, $\quad U_{n+1} = 1{,}02\, U_n + 80$.
2. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + 4000$.
   Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0.
3. En déduire V_n et $S = V_0 + V_1 + \cdots + V_9$.
4. Exprimer U_n en fonction de n.
5. Calculer ce que sera le salaire annuel de l'ouvrier en 2023.
6. Quelle est la somme totale des salaires X qu'aura reçue l'ouvrier pendant ses 10 premières années dans l'entreprise ?

▸ Exercice n°19

Un client dispose d'un capital de $C_0 = 1500$ euros sur un compte bancaire. Ce capital ne lui rapporte pas d'intérêt et il l'utilise de la façon suivante :

- le premier jour de chaque mois, il retire 10 % de son capital ;
- le 20 de chaque mois, il verse 50 euros sur ce compte.

On note C_n le capital détenu au bout de n mois.

1. Montrer que, pour tout entier n, $C_{n+1} = 0{,}9 \times C_n + 50$.
2. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = C_n - 500$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme V_0 et la raison.
3. Déterminer V_n en fonction de n.
4. En déduire C_n en fonction de n.
5. Déterminer le sens de variation de la suite (C_n).
6. Quelle sera la valeur du capital au bout d'un an ?