Probabilités (deuxième partie)

▶ Exercice n°1

Deux bus passent à 8h15 et à 8h30 à un certain arrêt. Un usager se présente à cet arrêt entre 8 heures et 8 heures 30 et on note X la durée en minutes entre 8 heures et l'heure d'arrivée de cet usager à l'arrêt. X suit donc la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;\,30]$.

1. Calculer la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le premier bus.
2. Calculer la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le deuxième bus.
3. En déduire la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes un bus.

▶ Exercice n°2

Les températures du mois de Juillet dans une ville de montagne suivent la loi normale d'espérance $\mu = 18{,}2\,^\circ\mathrm{C}$ et d'écart-type $\sigma = 3{,}6\,^\circ\mathrm{C}$.

1. Calculer la probabilité que, lors d'un jour de Juillet choisi au hasard, la température dans cette ville soit inférieure à $16\,^\circ\mathrm{C}$.
2. Calculer la probabilité que, lors d'un jour de Juillet choisi au hasard, la température dans cette ville soit comprise entre $20\,^\circ\mathrm{C}$ et $24{,}5\,^\circ\mathrm{C}$.
3. Calculer la probabilité que, lors d'un jour de Juillet choisi au hasard, la température dans cette ville soit supérieure à $21\,^\circ\mathrm{C}$.

▶ Exercice n°3

Le cahier des charges de l'usinage d'une tige prévoit pour sa longueur, en cm, l'intervalle de tolérance $[4{,}40; 4{,}80]$.
Le service qualité constate que sur un premier lot de tiges fabriquées, la longueur des tiges suit une loi normale d'espérance $\mu = 4{,}52$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}21$.
Quelle est la probabilité que la longueur d'une pièce prise au hasard dans ce lot, soit comprise dans l'intervalle de tolérance ?

▶ Exercice n°4

La durée de vie d'un moteur (exprimée en nombre de kilomètres parcourus) suit une loi normale d'espérance $\mu = 200\,000$ et d'écart-type $\sigma = 30\,000$.

1. Calculer la probabilité que la durée de vie du moteur soit supérieure à 250 000 km.
2. Les automobiles équipées de ce moteur sont garanties 120 000 km. Calculer la probabilité que la garantie soit utilisée pour un problème de moteur cassé.

▶ Exercice n°5

Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
Le tableau ci-dessous donne $p(X \leqslant k)$ pour k entier compris entre 90 et 100.

k	$p(X \leqslant k)$
90	0,1586552539
91	0,1840601253
92	0,2118553986
93	0,2419636522
94	0,2742531178
95	0,3085375387
96	0,3445782584
97	0,3820885778
98	0,4207402906
99	0,4601721627
100	0,5

1. Déduire du tableau, sans utiliser la calculatrice, $p(X \geqslant 110)$.
2. Soit a le réel tel que $p(X \leqslant a) = 0{,}25$. Déterminer, d'après le tableau, un encadrement à une unité près de a.

▶ Exercice n°6

Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ inconnu.
Sachant que $p(30{,}4 < X < 69{,}6) = 0{,}95$, on cherche à évaluer la valeur de l'écart-type σ.

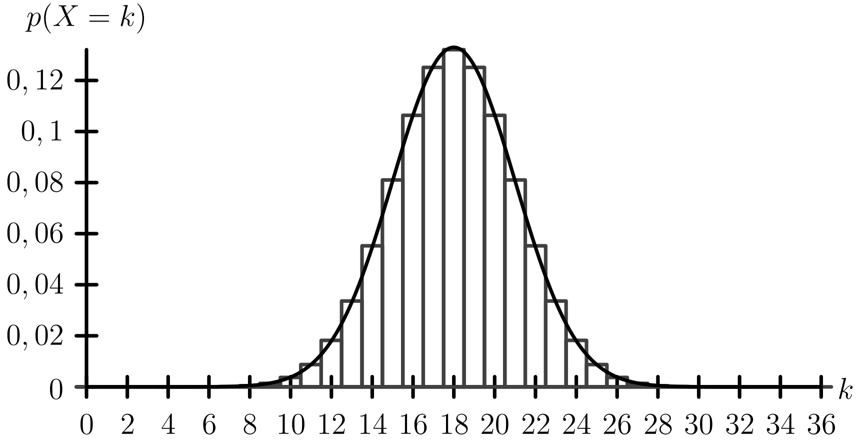
1. Justifier que l'intervalle $[30{,}4\,;\,69{,}6]$ a pour milieu 50.
2. Sachant que l'on doit avoir $p\,(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$, déterminer une valeur approchée de l'écart-type σ.

▶ Exercice n°7

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer, 36 fois de suite, une pièce et on note X le nombre de « pile » obtenus.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera l'espérance.
2. Calculer $p(X = 12) + p(X = 13) + p(X = 14)$.

3. Si on remplace chaque bâton de la représentation graphique de la loi binomiale de paramètres $n = 36$ et $p = 0{,}5$ par un rectangle de même hauteur et de largeur 1 et si on ajoute la courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-0{,}5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ avec $\mu = 18$ et $\sigma = 3$, on obtient le graphique ci-dessous.



L'aire de chaque rectangle est égale à $p(X = k)$ car sa largeur est de 1. On peut constater qu'ajouter les aires de rectangles consécutifs donne un résultat proche de l'aire sous la courbe correspondante.
Sous certaines conditions, la loi normale peut permettre d'obtenir une valeur approchée des probabilités d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
En considérant que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 18$ et d'écart-type $\sigma = 3$, calculer $p(11{,}5 \leqslant X \leqslant 14{,}5)$ et comparer avec le résultat de la question 2.

► Exercice n°8
Dans une serre où sont élevées des drosophiles, le pourcentage de mouches avec le type « yeux rouges » est censé être de 80%, s'il n'y a pas de facteurs extérieurs qui engendrent des mutations.
On prélève un échantillon de 1000 mouches et on observe que 76% des mouches sont du type « yeux rouges ».

1. Calculer l'intervalle de fluctuation à 95% associé à la proportion supposée de 80% et à un échantillon de 1000 mouches.
2. La proportion constatée de 76% des mouches du type « yeux rouges » permet-elle de suspecter la présence de facteurs extérieurs engendrant des mutations ?

► Exercice n°9
On émet l'hypothèse qu'une pièce de monnaie est équilibrée, c'est à dire que la probabilité d'obtenir « pile » est $p = 0{,}5$. Pour vérifier cette hypothèse, on lance 100 fois de suite cette pièce.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95% associé à la proportion supposée $p = 0{,}5$ et à ce lancer de 100 pièces.
2. Lors de l'expérience consistant à lancer 100 fois la pièce, on a obtenu 60 fois « pile ». En déduire la fréquence observée f de « pile » obtenus.
   Peut-on accepter l'hypothèse que la pièce est équilibrée au seuil de 95% ?

► Exercice n°10
Dans cet exercice, les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Une étude interne à une grande banque a montré qu'on peut estimer que l'âge moyen d'un client demandant un crédit immobilier est une variable aléatoire, notée X, qui suit la loi normale d'espérance 40,5 et d'écart type 12.
   a) Calculer la probabilité que le client demandeur d'un prêt soit d'un âge compris entre 30 et 35 ans.
   b) Calculer la probabilité que le client n'ait pas demandé un prêt immobilier avant 55 ans.
2. Dans un slogan publicitaire, la banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante, associe la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées.
   a) Donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
   b) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. Énoncer une règle de décision permettant de valider ou non le slogan publicitaire de la banque, au niveau de confiance 95 %.
   c) Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ?

► Exercice n°11
Un fournisseur d'accès Internet propose des abonnements comportant la fourniture d'un modem ADSL. Selon un enquête menée par une association de consommateurs et réalisée auprès de 428 clients, 86 déclarent avoir reçu un modem défectueux.
Déterminer l'intervalle de confiance à 95% de la proportion de modems défectueux.

▶ Exercice n°12

1. On donne à un échantillon de 130 patients souffrant de rhumatismes un nouveau médicament. A la fin du traitement, 44% de ces patients ont déclaré que le médicament avait soulagé leurs douleurs.
   Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % associé à la déclaration des patients de cet échantillon.
2. Au même moment, on a distribué à un autre échantillon de 100 patients souffrant de rhumatismes un placebo. A la fin du traitement, 40% de ces patients ont déclaré que le médicament avait soulagé leurs douleurs.
   Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % associé à la déclaration des patients de cet échantillon.
3. Peut-on émettre, suite à ce test, une conclusion claire sur l'efficacité du nouveau médicament ?

▶ Exercice n°13

On veut estimer la proportion p de foyers disposant d'un lecteur Blu-ray en faisant une enquête auprès d'un échantillon. Quelle doit être la taille minimale n de l'échantillon pour obtenir un résultat avec une précision de 3% au seuil de 95% ?

▶ Exercice n°14

On suppose que le pourcentage d'intention de vote pour un candidat est de 45%. Quel nombre minimal n de personnes faut-il interroger pour pouvoir affirmer avec une probabilité supérieure à 95% que ce candidat ne sera pas élu ?

▶ Exercice n°12

1. On donne à un échantillon de 130 patients souffrant de rhumatismes un nouveau médicament. A la fin du traitement, 44% de ces patients ont déclaré que le médicament avait soulagé leurs douleurs.
   Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % associé à la déclaration des patients de cet échantillon.
2. Au même moment, on a distribué à un autre échantillon de 100 patients souffrant de rhumatismes un placebo. A la fin du traitement, 40% de ces patients ont déclaré que le médicament avait soulagé leurs douleurs.
   Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % associé à la déclaration des patients de cet échantillon.
3. Peut-on émettre, suite à ce test, une conclusion claire sur l'efficacité du nouveau médicament ?

▶ Exercice n°13

On veut estimer la proportion p de foyers disposant d'un lecteur Blu-ray en faisant une enquête auprès d'un échantillon. Quelle doit être la taille minimale n de l'échantillon pour obtenir un résultat avec une précision de 3% au seuil de 95% ?

▶ Exercice n°14

On suppose que le pourcentage d'intention de vote pour un candidat est de 45%. Quel nombre minimal n de personnes faut-il interroger pour pouvoir affirmer avec une probabilité supérieure à 95% que ce candidat ne sera pas élu ?