Probabilités (première partie)

▶ Exercice n°1

On sait que $p(A) = \dfrac{1}{3}$, $p_A(B) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{2}{5}$.

1. Construire et compléter l'arbre pondéré correspondant.
2. En déduire $p\left(A \cap B\right)$, $p\left(A \cap \overline{B}\right)$, $p\left(\overline{A} \cap B\right)$ et $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$

▶ Exercice n°2

On sait que $p(A) = \dfrac{1}{3}$, $p_A(B) = \dfrac{1}{4}$ et $p_{\overline{A}}(B) = \dfrac{1}{2}$.

1. Construire et compléter l'arbre pondéré correspondant.
2. En déduire $p(B)$.

▶ Exercice n°3

Dans une entreprise comprenant 20% de cadres et 80% d'employés, on sait que 40% des cadres et 15% des employés parlent l'anglais.

1. Construire et compléter l'arbre pondéré correspondant.
2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise. On note C l'événement « être cadre », E l'événement « être employé » et A l'événement « parler anglais ». Calculer $p\left(C \cap A\right)$, $p\left(E \cap A\right)$, $p(A)$ et $p_A(C)$.

▶ Exercice n°4

Dans un groupe 30% des personnes pratiquent le tennis. On sait que 60% des membres de ce groupe sont des hommes et que 55% d'entre eux ne jouent pas au tennis. Quelle est la probabilité pour qu'une femme choisie au hasard ne pratique pas le tennis ?

▶ Exercice n°5

La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 0,04. Le contrôle de fabrication est tel que :
- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité de 0,97.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité de 0,98.
On prend au hasard une pièce et on la contrôle :

1. Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce acceptée soit mauvaise.

▶ Exercice n°6

Un lycée comporte trois classes de Terminale ES. La TES1 contient 20 filles et 15 garçons, la TES2 10 filles et 20 garçons et la TES3 18 filles et 17 garçons.
On choisit au hasard une de ces trois classes, puis un élève de cette classe.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille.
3. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit en TES1 sachant que c'est un garçon.

▶ Exercice n°7

Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats stagiaires, il y a 60 % de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates. On choisit au hasard un candidat.

1. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé ?
2. Quelle est la probabilité que ce candidat soit engagé ?
3. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon sachant qu'il est engagé ?

▶ Exercice n°8

Un quart de la population d'une ville a été vaccinée contre la grippe. Au cours de l'hiver, on constate qu'il y a un vacciné sur treize parmi les malades. La probabilité qu'une personne soit malade sachant qu'il est vacciné est de 0,1. Pour une personne prise au hasard, on note M l'événement « être malade » et V l'événement « être vacciné » .
Calculer $p\left(M \cap V\right)$, $p(M)$, $p\left(M \cap \overline{V}\right)$ et $p_{\overline{V}}(M)$.

▶ Exercice n°9

Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en 3 cases notées 1, 2 et 3. Deux concurrents A et B sont en présence. On admet qu'à chaque lancer , chacun d'eux atteint une case et une seule et que les lancers sont indépendants. Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1, 2 et 3 sont $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{7}{12}$. Pour le concurrent B, les 3 éventualités sont équiprobables.

1. Le concurrent A lance la fléchette 3 fois.
   a) Quelle est la probabilité qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?
   b) Quelle est la probabilité qu'il atteigne les cases 1, 2 et 3 (dans cet ordre) ?
2. On choisit un des deux concurrents. La probabilité de choisir A est le double de celle de choisir B.
   a) Un seul lancer est effectué. Quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte ?
   b) Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte. Quelle est la probabilité que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

▶ Exercice n°10

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur le deux thèmes « Cinéma » ou « Musique ». Cette boîte contient un tiers de questions portant sur le thème « Cinéma », les autres portant sur le thème « Musique ». Le candidat à ce jeu s'appelle Pierre.

PREMIÈRE PARTIE : Dans cette partie, on pose à Pierre une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :
La probabilité que Pierre réponde correctement à une question du thème « Cinéma » est égale à $\frac{1}{2}$.
La probabilité que Pierre réponde correctement une question du thème « Musique » est égale à $\frac{3}{4}$.
On considère les évènements suivants : C : la question porte sur le thème « Cinéma », M : la question porte sur le thème « Musique », E : Pierre répond correctement à la question posée.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement : « La question porte sur le thème « Musique » et Pierre y a répondu correctement ».
2. Montrer que la probabilité de l'évènement E est égale à $\frac{2}{3}$.
3. On suppose que Pierre n'a pas répondu correctement à la question posée ; quelle est la probabilité pour que la question ait porté sur le thème « Cinéma » ?

DEUXIÈME PARTIE : En fait le jeu se déroule de la façon suivante :
On pose à Pierre une première question (selon les modalités décrites dans la première partie) et iI marque 5 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une deuxième question choisie, indépendamment de la première et il marque 2 points s'il répond correctement et le jeu s'arrête.
Sinon, on lui pose une troisième question (choisie indépendamment des deux précédentes) et il marque 1 point s'il répond correctement.
Sinon le jeu s'arrête et il ne marque aucun point.
À chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Pierre.
3. Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Pierre.

▶ Exercice n°11

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70 % de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant également partagé entre le deuxième producteur et le troisième.
Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour les trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 20 % des pommes fournies par le premier producteur sont hors calibre, 5 % des pommes fournies par le second producteur sont hors calibre et 4 % des pommes fournies par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante : un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de «bon calibre » ou « hors calibre ».
Un mercredi matin, un contrôle de qualité est effectué par le contrôleur de la manière décrite ci-dessus.
On appellera F_1 l'évènement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »
F_2 l'évènement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »
F_3 l'évènement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »
C l'évènement : « la pomme prélevée a un bon calibre »
$\overline{C}$ l'évènement : « la pomme prélevée est hors calibre ».
Tous les résultats de cet exercice seront donnés à 10^{-4} *près.*

1. Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.
2. Construire un arbre pondéré répondant à la situation décrite.
3. Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est 0,1440.
4. Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : 0,8465.
5. La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme : « Cette pomme provient très probablement du premier producteur ». Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.

▶ Exercice n°12

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 10 euros ; si elle est jaune, il perd 5 euros et si elle est verte, le joueur tire une deuxième boule sans avoir remis la première dans l'urne. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 euros, sinon il perd 4 euros.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.
2. On note X le gain effectif obtenu par un joueur. Déterminer la loi de probabilité associée à X et calculer son espérance.

► **Exercice n°13**
La probabilité qu'une machine tombe en panne un jour, indépendamment du jour, est de 0,1 et on note X le nombre de jours où la machine tombe en panne sur une durée de 10 jours consécutifs.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'en dix jours, la machine ne tombe pas en panne.
3. Calculer la probabilité que sur 10 jours, la machine tombe en panne exactement 3 jours.
4. Calculer la probabilité qu'en dix jours, la machine ne tombe pas en panne plus d'une journée.
5. Donner l'espérance de X et interpréter le résultat.

► **Exercice n°14**
Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un coureur est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations d'un coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :
   - il a été contrôlé 5 fois exactement ;
   - il n'a pas été contrôlé ;
   - il a été contrôlé au moins une fois.

► **Exercice n°15**
Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur les rythmes scolaires.
L'enquête révèle que 56,75 % des élèves sont favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

1. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.
2. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne soit favorable à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire. En donner une valeur arrondie à 10^{-4}.
3. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

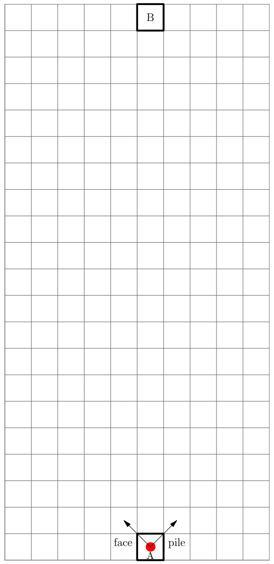
► **Exercice n°16**
La probabilité que l'écran d'un téléviseur fabriqué dans un certaine usine ait un défaut est de 0,02. On prélève 50 téléviseurs du stock de l'usine et on admet que le stock est suffisamment important pour que le fait d'y prélever 50 téléviseurs soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que sur les 50 téléviseurs prélevés il y en ait exactement deux dont l'écran est défectueux ?
2. Quelle est la probabilité que sur les 50 téléviseurs prélevés il y en ait au moins un dont l'écran est défectueux ?
3. Quel est, par lot de 50 téléviseurs prélevés, le nombre moyen de ceux qui ont un écran défectueux ?

► **Exercice n°17**
Un jeu consiste à essayer d'amener un jeton de la case A à la case B (distante verticalement de 20 cases) sur une grille (voir figure ci-dessous) en lançant 20 fois de suite une pièce selon le principe suivant :

- si la pièce donne « pile », on avance le jeton diagonalement d'une case vers le haut et vers la droite ;
- si la pièce donne « face », on avance le jeton diagonalement d'une case vers le haut et vers la gauche ;

On cherche à établir la probabilité d'atteindre la case B.



Partie A : *Simulation avec un algorithme*

1. Pour réussir à atteindre la case B, combien de fois faut-il tomber sur « pile » et « face » lors des 20 lancers consécutifs de la pièce ?
2. À l'aide de l'algorithme AlgoBox ci-dessous, on cherche à déterminer expérimentalement une estimation de la probabilité d'atteindre la case B en simulant 100 000 fois le principe du jeu.
   Remarques :
   - *la fonction* `ALGOBOX_ALEA_ENT(0,1)` *permet d'obtenir un entier pseudo-aléatoire égal à 0 ou à 1 et donc de simuler le lancer d'une pièce en associant ici 0 au fait d'obtenir « face » et 1 au fait d'obtenir « pile ».*
   - *La variable* `nb_piles` *permet de compter le nombre de fois où la pièce donne « pile » lors d'une partie.*
   - *La variable* `nb_jeux_gagnants` *permet de compter le nombre de fois où la case B est atteinte lors des* 100 000 *parties simulées.*

```
1: VARIABLES
2: i EST_DU_TYPE NOMBRE
3: nb_jeux_gagnants EST_DU_TYPE NOMBRE
4: lancer EST_DU_TYPE NOMBRE
5: nb_piles EST_DU_TYPE NOMBRE
6: frequence EST_DU_TYPE NOMBRE
7: DEBUT_ALGORITHME
8:   nb_jeux_gagnants PREND_LA_VALEUR 0
9:   POUR i ALLANT_DE 1 A 100000
10:    DEBUT_POUR
11:    nb_piles PREND_LA_VALEUR 0
12:    POUR lancer ALLANT_DE 1 A ....
13:      DEBUT_POUR
14:      SI (ALGOBOX_ALEA_ENT(0,1)==1) ALORS
15:        DEBUT_SI
16:        nb_piles PREND_LA_VALEUR nb_piles+1
17:        FIN_SI
18:      FIN_POUR
19:    SI (....................) ALORS
20:      DEBUT_SI
21:      nb_jeux_gagnants PREND_LA_VALEUR nb_jeux_gagnants+1
22:      FIN_SI
23:    FIN_POUR
24:  frequence PREND_LA_VALEUR nb_jeux_gagnants/100000
25:  AFFICHER frequence
26: FIN_ALGORITHME
```

3. Compléter les lignes 12 et 19 pour que l'algorithme corresponde à la simulation souhaitée.
4. En exécutant l'algorithme complet plusieurs fois, émettre une conjecture sur la probabilité d'atteindre la case B.

Partie B : *Étude théorique*

On note X le nombre de « pile » obtenus lors des 20 lancers consécutifs de la pièce.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. En déduire la probabilité de réussir à atteindre la case B.