Logarithme népérien

▶ Exercice n°1
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$:

1. $\ln(8)$
2. $\ln(8) + \ln(32)$
3. $\ln(64) - \ln(8)$
4. $\ln(16) - 3\ln(2)$

▶ Exercice n°2
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:
(e *est le nombre tel que* $\ln \mathrm{e} = 1$*)*

1. $\ln\left(\dfrac{1}{9}\right)$
2. $\ln(81) - 2\ln(3)$
3. $\ln\left(\dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)$
4. $\ln\left(9\mathrm{e}^2\right)$

▶ Exercice n°3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\ln(x+1) = 0$
2. $\ln(2-3x) = \ln 4$
3. $\ln(2x) = \ln(x-1)$
4. $\ln(x-1) + \ln(x-2) = \ln 6$
5. $\ln[(x-1)(x-2)] = \ln 6$
6. $\ln(4x+1) + \ln(x+2) - 2\ln(3x) = 0$
7. $\ln x = 4$
8. $\ln(2x) = 5$
9. $\ln(3x) = 1$
10. $\ln(1+x) = -2$
11. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$
12. $(\ln x)^2 - 6\ln x + 8 = 0$

▶ Exercice n°4
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\ln(x+1) \leqslant 0$
2. $\ln x \geqslant 3$
3. $1 - \ln x \geqslant 0$
4. $\ln x - 4 \leqslant 0$
5. $\ln(2-x) \geqslant 0$
6. $\ln(x^2 - 4x + 7) \geqslant \ln 4$

▶ Exercice n°5
Déterminer, dans un tableau, le signe de $f(x)$ sur l'intervalle I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\ln x \qquad I =]0\,;+\infty[$
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{3-x} \qquad I =]0\,;+\infty[$
3. $f(x) = (\ln x) - 4 \qquad I =]0\,;+\infty[$
4. $f(x) = 1 - \ln x \qquad I =]0\,;+\infty[$
5. $f(x) = \ln(x-4) \qquad I =]4\,;+\infty[$

▶ Exercice n°6
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$
2. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2$
3. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
4. f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4\ln x}{x^2}$

▶ Exercice n°7
Étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.

▶ Exercice n°8
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x - x$.

1. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution x_0 dans $[3\,;4]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par excès.

▶ Exercice n°9

La fonction B définie sur $[1\,;\,6]$ par $B(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$ représente le bénéfice mensuel (en dizaines de milliers d'euros) réalisé par une entreprise lors de la vente de x centaines d'objets produits par mois.
En étudiant les variations de B, déterminer la quantité d'objets à produire par mois pour obtenir un bénéfice mensuel maximal.

▶ Exercice n°10

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1 + \ln x$ et C_f sa courbe dans un repère.

1. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à C_f au point d'abscisse 2.
3. Étudier la convexité de f sur $]0;+\infty[$.
4. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x+1)(\ln x - 2)$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°11

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. Étudier le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.
3. En remarquant que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x - 2 \times \dfrac{1}{x}$, déterminer une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 8\ln x - 3x + \dfrac{4}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. Montrer qu'il existe un point de la courbe C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -3.

▶ Exercice n°13

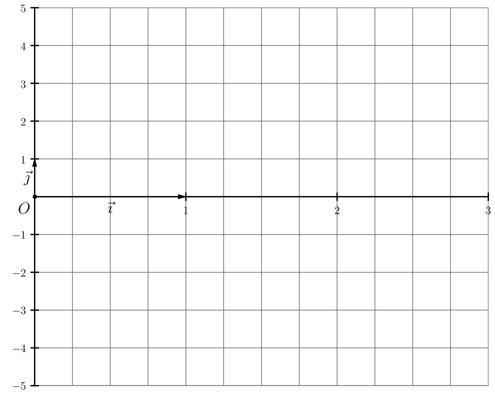
Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + \ln x$.

1. Dériver f et montrer que, pour tout x de $]2;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x\,(x-2)^2}$.
2. En déduire les variations de f sur $]2;+\infty[$.

▶ Exercice n°14

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - 2x - \ln x$.

1. Dériver f et étudier ses variations sur $]0;+\infty[$.
2. Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;\,3]$ dans le repère ci-dessous :



3. Dans le graphique ci-dessus, tracer la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Dans le graphique ci-dessus, tracer la droite D d'équation $y = 3 - 2x$. Étudier, par le calcul, la position relative de la courbe représentative de f et de la droite D sur $]0;+\infty[$.
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[1\,;\,2]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par défaut.
6. Justifier que f est convexe sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°15

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1 + \ln x$.
   a) Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.
   b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{\ln x}{x}$.
   a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°16

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \ln x$.
   a) Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. Soit G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=(x+1)\ln x$.

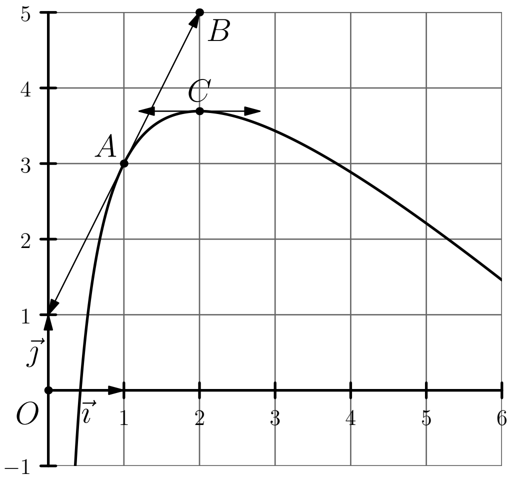
   a) Vérifier que G est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

   b) En déduire les variations de G sur $]0;+\infty[$.

▶ Exercice n°17

Dans le graphique ci-dessous est représenté la courbe C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$. On sait que :

- La courbe C_f passe par les points $A(1;3)$ et $C(2;3+\ln 2)$;
- La tangente à C_f au point A passe par le point $B(2;5)$;
- C_f admet une tangente horizontale au point C.



1. Déduire des informations données les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.
2. On admet que, pour tout $x>0$, $f(x)=ax+6+\dfrac{b}{x}+\ln x$ où a et b sont deux constantes réelles. Retrouver les valeurs de a et b à partir des résultats de la question précédente.

▶ Exercice n°18

Quand l'oreille d'un individu est soumise à une pression acoustique x, exprimée en bars, l'intensité sonore, exprimée en décibels, du bruit responsable de cette pression est donnée par :

$$f(x)=8{,}68\times\ln x+93{,}28$$

1. Calculer l'intensité sonore correspondante à une pression acoustique de 5 bars.
2. Justifier que f est une fonction strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3. Un individu normal ne peut supporter un bruit supérieur à 120 décibels. On cherche à connaitre le premier nombre entier x de bars pour lequel l'intensité $f(x)$ dépasse 120 décibels à l'aide d'un algorithme.
   Pour cela on part d'une pression $x=1$ que l'on augmente de 1 tant que cela est nécessaire.
   Compléter la ligne 5 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il réponde au problème : *(attention : en informatique, la syntaxe utilisée pour le logarithme népérien est* `log` *et pas* `ln`)

```
 1: VARIABLES
 2: x EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: DEBUT_ALGORITHME
 4:   x PREND_LA_VALEUR 1
 5:   TANT_QUE (8.68*log(x)+93.28...........) FAIRE
 6:     DEBUT_TANT_QUE
 7:     x PREND_LA_VALEUR x+1
 8:     FIN_TANT_QUE
 9:   AFFICHER x
10: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°19

Déterminer, dans chacun des cas suivants, le plus petit entiers positif n vérifiant la relation donnée :

1. $3^n \geqslant 800$
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0{,}01$
3. $(1{,}03)^n \geqslant 2$
4. $(0{,}95)^n \leqslant 0{,}2$

▶ Exercice n°20

On considère la proposition suivante : « Si $x=\mathrm{e}$ alors $(\ln x)^2=1$ ».

1. La proposition est-elle vraie ?
2. Écrire la réciproque de cette proposition.
3. La réciproque est-elle vraie ?