

Intégration

► Exercice n°1

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_2^3 (x^2 + 1) dx$

2. $\int_1^2 \left(3x + 1 + \frac{1}{x} \right) dx$

3. $\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

4. $\int_1^e \frac{1}{x} (\ln x) dx$

5. $\int_{-1}^0 3e^{-x} dx$

6. $\int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x}) dx$

7. $\int_0^1 xe^{-x^2} dx$

8. $\int_0^{\ln 3} \frac{2e^{3x} - e^x - 5}{e^x} dx$

► Exercice n°2

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x \ln x$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = 1 + \ln x$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^2 f(x) dx$

► Exercice n°3

1. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (-2x - 3)e^{-x}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 f(x) dx$

► Exercice n°4

La probabilité qu'une année donnée la hauteur maximale d'un fleuve soit inférieure à a mètres est égale à $P(a) = \int_0^a 0,4x e^{-0,2x^2} dx$.

1. Calculer $P(a)$ en fonction de a .

2. En déduire la valeur de a pour laquelle $P(a) = 0,99$.

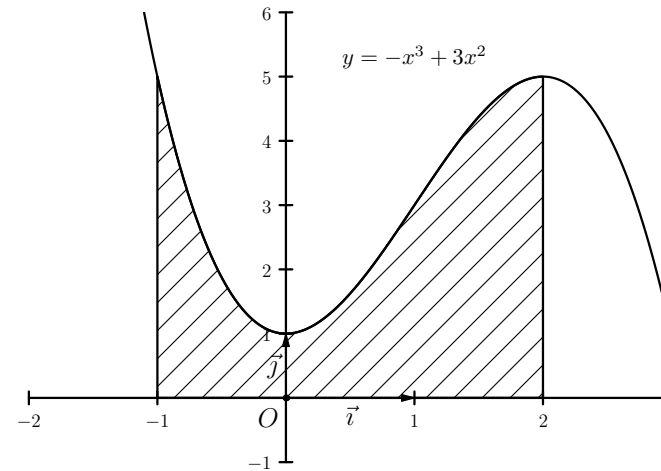
► Exercice n°5

1. Calculer, en fonction de a , l'intégrale $I(a) = \int_0^a 6e^{2x} - 2e^x dx$.

2. Déterminer la valeur de a pour laquelle $I(a) = 4$.

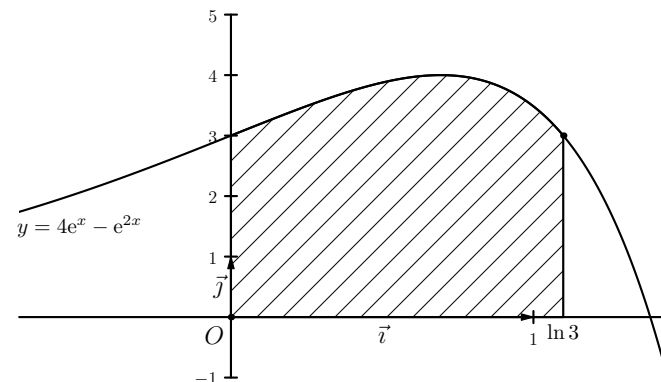
► Exercice n°6

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



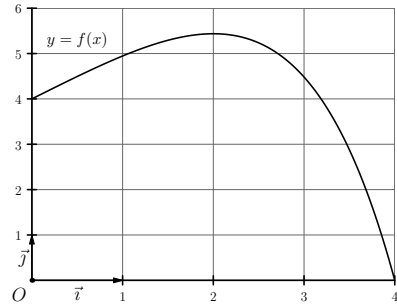
► Exercice n°7

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°8**

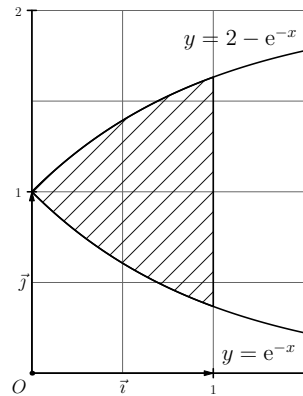
La courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0; 4]$ est donnée ci-dessous :



Justifier, d'après le graphique, que $12 \leq \int_0^3 f(x) dx \leq 18$.

► **Exercice n°9**

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la zone hachurée ci-dessous :



► **Exercice n°10**

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

Dans un repère orthonormé d'unité 2 cm, on note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite d'équation $y = x$.

1. Étudier la position relative de C_f et D sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer l'aire A (en cm^2) du domaine délimité par la courbe C_f , la droite D et par les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

► **Exercice n°11**

Calculer la valeur moyenne sur $[1; 4]$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x}$.

► **Exercice n°12**

La vitesse (en mètres par seconde) d'un objet en mouvement est définie par $v(t) = 25(1 - e^{-2t})$ (t en secondes).

Calculer la vitesse moyenne de l'objet (la valeur moyenne de la fonction « vitesse ») entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.

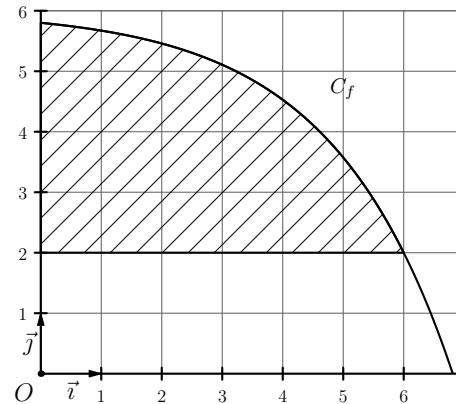
► **Exercice n°13**

Le cours d'une action en euros est modélisée par la fonction f définie sur $[1; 13]$ par $f(t) = 20t + 40 - 80 \ln t$ où t représente le nombre de mois écoulés depuis le 1^{er} décembre 2013.

1. Étudier les variations de f sur $[1; 13]$.
2. Justifier que la fonction F définie par $F(t) = 10t^2 + 120t - 80t \ln t$ est une primitive de f sur $[1; 13]$.
3. Calculer la valeur moyenne de f sur $[1; 13]$.

► **Exercice n°14**

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 6 - 4e^{0.5x-3}$ et C_f sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.



1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection entre C_f et l'axe des abscisses.
2. Justifier que $f(6) = 2$.
3. Montrer qu'il existe un point de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 .
4. Justifier que f est concave sur $[0; +\infty[$.
5. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la partie hachurée sur le graphique.

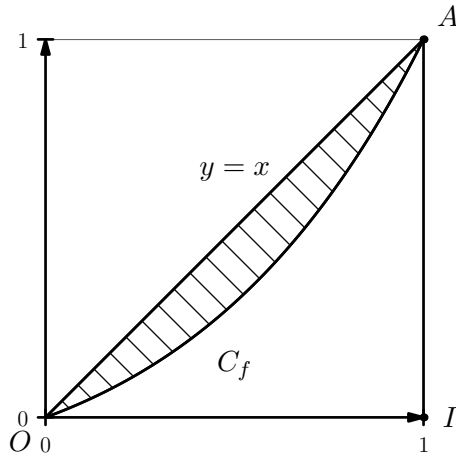
► Exercice n°15

1. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $1 - e^{x-1} \geq 0$.
 - b) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x(1 - e^{x-1})$. Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[0; 1]$.
 - c) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = (1 - x)e^{x-1} + \frac{x^2}{2}$ est une primitive de g sur $[0; 1]$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{x-1}$.
 - a) Vérifier que :
 - $f(0) = 0$;
 - $f(1) = 1$;
 - f est croissante sur $[0; 1]$;
 - $f(x) \leq x$ pour tout x de $[0; 1]$.

(on utilisera le résultat de la question 1. b)

Remarque : la courbe d'une fonction vérifiant ces conditions est appelée en économie une courbe de Lorenz.

- b) Dans le graphique ci-dessous figure la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



On appelle coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f le rapport $\frac{\text{aire de la partie hachurée}}{\text{aire du triangle } OIA}$.

En remarquant que l'aire de la partie hachurée est égale à $\int_0^1 g(x) dx$, calculer la valeur du coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f .

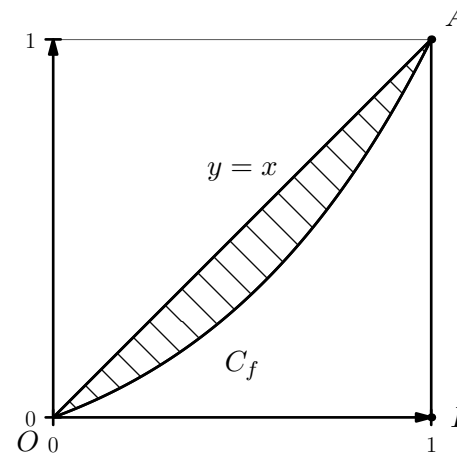
► Exercice n°15

1. a) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $1 - e^{x-1} \geq 0$.
 - b) Soit g la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = x(1 - e^{x-1})$. Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[0; 1]$.
 - c) Montrer que la fonction G définie par $G(x) = (1 - x)e^{x-1} + \frac{x^2}{2}$ est une primitive de g sur $[0; 1]$.
2. Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^{x-1}$.
 - a) Vérifier que :
 - $f(0) = 0$;
 - $f(1) = 1$;
 - f est croissante sur $[0; 1]$;
 - $f(x) \leq x$ pour tout x de $[0; 1]$.

(on utilisera le résultat de la question 1. b)

Remarque : la courbe d'une fonction vérifiant ces conditions est appelée en économie une courbe de Lorenz.

- b) Dans le graphique ci-dessous figure la courbe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$.



On appelle coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f le rapport $\frac{\text{aire de la partie hachurée}}{\text{aire du triangle } OIA}$.

En remarquant que l'aire de la partie hachurée est égale à $\int_0^1 g(x) dx$, calculer la valeur du coefficient de Gini associé à la courbe de Lorenz définie par la fonction f .