Exponentielle

▶ Exercice n°1
Simplifier les expressions suivantes :

$A = \mathrm{e}^{-\ln 8}$ $\quad B = \mathrm{e}^{3\ln 5}$ $\quad C = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) + \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln 4}$

$D = \mathrm{e}^{2+\ln 3}$ $\quad E = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^3$ $\quad F = \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x}\right)$

▶ Exercice n°2
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x} = 3$
2. $\mathrm{e}^{x+2} = 1$
3. $\mathrm{e}^{x} + 1 = 0$
4. $\mathrm{e}^{x+3} = 5$
5. $\mathrm{e}^{x^2-x-11} = e$
6. $\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^{x} + 8 = 0$
7. $\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{x} - 10 = 0$
8. $2\mathrm{e}^{-x} = 3 - \mathrm{e}^{x}$

▶ Exercice n°3
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x} - 2 \geqslant 0$
2. $3 - \mathrm{e}^{2x} \leqslant 0$
3. $\mathrm{e}^{-x} - 1 < 0$
4. $\mathrm{e}^{x} < 4\mathrm{e}^{-x}$

▶ Exercice n°4
Un solide dont la température à l'instant $t = 0$ est de 25 °C est placé à l'extérieur, où la température est de 8 °C. La température de ce corps (en degré celsius) à l'instant t (en secondes) est donné par $\theta(t) = 8 + 17\mathrm{e}^{kt}$ où k est une constante réelle.

1. On observe qu'au bout de deux minutes, la température du solide est de 20 °C. En déduire la valeur de k (on donnera une valeur approchée à 10^{-4} près).
2. Au bout de combien de temps, la température du solide sera-t-elle de 15 °C ?

▶ Exercice n°5
Déterminer, dans un tableau, le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$
2. $f(x) = \dfrac{4-x}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $f(x) = \mathrm{e}^{x} - 2$
4. $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x}$

▶ Exercice n°6
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x}}$
3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^{x}$
4. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3 + \mathrm{e}^{x}}$
5. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - \mathrm{e}^{x})^2$

▶ Exercice n°7
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - 3x$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°8
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1 + \mathrm{e}^{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
3. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

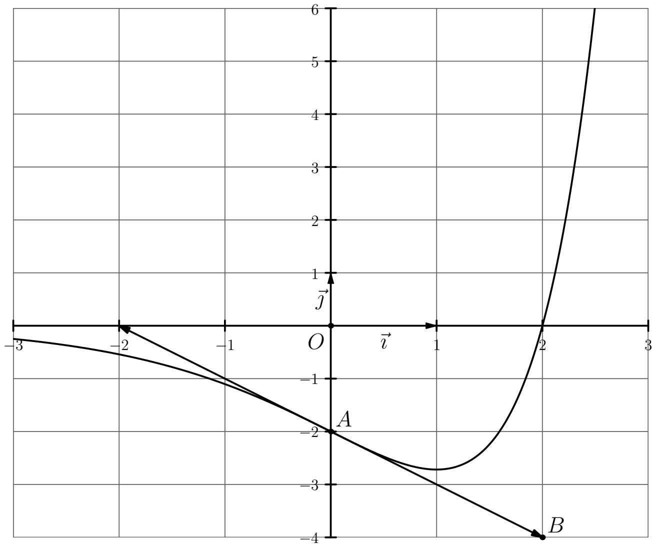
▶ Exercice n°9
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et justifier que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion.
3. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (2x - 2)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice n°10

Dans le graphique ci-dessous est représenté la courbe C_f d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- La courbe C_f passe par le point $A(0; -2)$;
- La tangente à C_f au point A passe par le point $B(2; -4)$;



1. Déduire des informations données les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. On admet que, pour tout x, $f(x) = (x + a)\mathrm{e}^{bx}$ où a et b sont deux constantes réelles. Retrouver les valeurs de a et b à partir des résultats de la question précédente.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que le point A est un point d'inflexion de la courbe C_f.

► Exercice n°11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point A.
4. On cherche à déterminer le premier entier positif n tel que $f(n) \leqslant 0{,}01$ à l'aide de l'algorithme AlgoBox ci-dessous. Compléter la ligne 5 pour que l'algorithme puisse répondre à la question.

```
1: VARIABLES
2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
3: DEBUT_ALGORITHME
4:   n PREND_LA_VALEUR 0
5:   TANT_QUE ((n+1)/exp(n)..........) FAIRE
6:     DEBUT_TANT_QUE
7:     n PREND_LA_VALEUR n+1
8:     FIN_TANT_QUE
9:   AFFICHER n
10: FIN_ALGORITHME
```

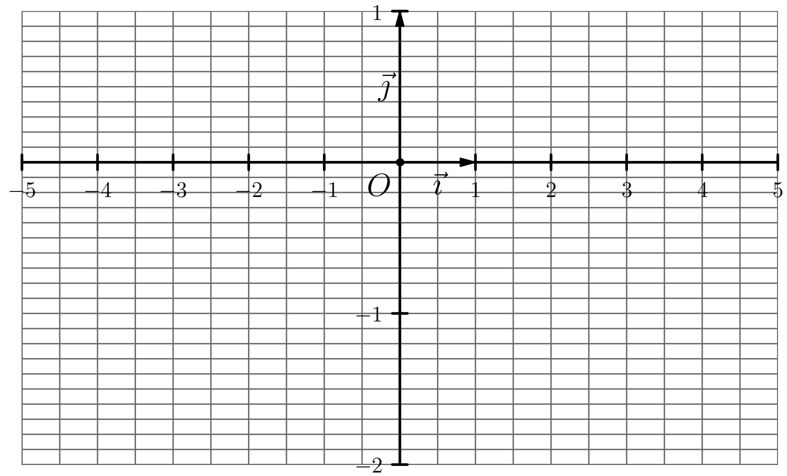
► Exercice n°12

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. En détaillant les calculs, déterminer la valeur exacte de $f(3\ln 2)$.
2. Justifier que, pour tout x, on a $f(x) < 1$ et $f(x) > -2$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Compléter le tableau de valeurs suivants :

x	-5	-3	-1	-0,5	0	0,5	1	3	5
$f(x)$									

5. À l'aide du tableau de valeurs, tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



▶ **Exercice n°13**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - x - 1\right) e^x$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice n°14**

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1 - x)\,\mathrm{e}^x - 1$.
   a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)\,\mathrm{e}^x + 2 - x$.
   a) À l'aide de la question 1. b), étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer qu'il existe un point A de la courbe C_f où la tangente T est parallèle à la droite D d'équation $y = -x$.

▶ **Exercice n°15**
Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-4x}$
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3}$
3. f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$
4. f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{3x}{x+1}}$

▶ **Exercice n°16**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 4\mathrm{e}^x$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite D d'équation $y = -3$.
3. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

▶ **Exercice n°17**
La fonction de demande d'un produit informatique est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x + 8)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x centaines d'euros.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
2. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix x est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % de x.
   On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par :
   $E(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \times x$.
   a) Démontrer que $E(x) = \dfrac{-0{,}5x^2 - 3x}{x + 8}$.
   b) Déterminer le signe de $E(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

▶ **Exercice n°18**

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{-0{,}39x} > 0$.
2. On admet que, pour emprunter 100 000 euros au taux annuel de 4% remboursable en t années ($t > 1$), le montant annuel à rembourser est donné (en milliers d'euros) par $f(t) = \dfrac{4}{1 - \mathrm{e}^{-0{,}39t}}$.
   a) Quelle est le montant annuel à rembourser si l'emprunt doit être remboursé sur 10 ans ? sur 15 ans ?
   b) Justifier que la fonction f est décroissante sur $[1\,;+\infty[$.
   c) Justifier que le montant annuel à rembourser est toujours supérieur à 4 000 euros.

▶ **Exercice n°19**
Le taux d'hydratation de la peau, x heures après avoir appliqué une crème solaire, est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 50x\,\mathrm{e}^{-0{,}5x+1}$.

1. En étudiant les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$, déterminer le moment où le taux d'hydratation est maximal.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 50$ admet deux solutions : une dans l'intervalle $[0\,;1]$ et une autre dans l'intervalle $[5\,;5{,}5]$.
3. La crème solaire ne peut être commercialisée que si le taux d'hydratation dépasse 50% pendant une durée dépassant 6 heures. Ce critère est-il rempli ?

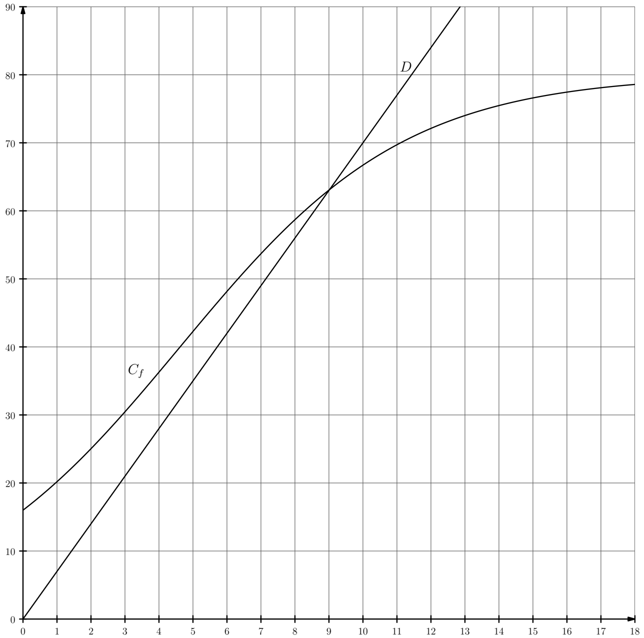
▶ **Exercice n°20**
Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 100000\,\mathrm{e}^{-1{,}6x+1{,}3}$. $f(x)$ représente le nombre d'individus d'une grande ville européenne dont le revenu annuel est supérieur ou égal à x (x en centaines de milliers d'euros).

1. Justifier que f est décroissante $[0\,;+\infty[$.
2. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 200 000 euros.

3. Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est supérieur ou égal à 200 000 euros et strictement inférieur à 250 000 euros.
4. Déterminer le revenu annuel x_0 pour lequel le nombre d'individus ayant un revenu annuel supérieur ou égal à x_0 est égal à 3000.

▶ Exercice n°21

Sur le graphique ci-dessous sont représentées C_f, la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;18]$ par $f(x) = \dfrac{80}{1+4\mathrm{e}^{-0,3x}}$ et D, la droite d'équation $y = 7x$. On admet que la courbe et la droite se coupent en un unique point d'abscisse $x_0 \approx 9$.



Le coût total (en centaine d'euros) de production par jour de x centaines d'un certain produit est égal à $f(x)$ (pour x compris entre 0 et 18).

1. Déterminer le montant des coûts fixes, c'est à dire le montant des coûts pour $x = 0$.
2. Déterminer, par le calcul, la production pour laquelle le coût total par jour est égal à 4000 euros.
3. Justifier, par le calcul, que f est bien croissante sur $[0\,;18]$.
4. La recette par jour (en centaines d'euros) est donnée par $R(x) = 7x$ (pour x compris entre 0 et 18). Déduire du graphique la production pour laquelle un bénéfice est réalisé.

▶ Exercice n°22

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 1 + \mathrm{e}^{-x}$.
   a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 2\mathrm{e}^{-x}$.
   a) À l'aide de la question 1. b), étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   b) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;3]$ et donner une valeur approchée à 0,1 près par excès de cette solution.

▶ Exercice n°23

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;6]$ par $f(x) = 0{,}01\,x\mathrm{e}^{x} - 0{,}01\,\mathrm{e}^{x} - 2$.
   a) Justifier que f est strictement croissante sur $]0\,;6]$.
   b) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4\,;5]$ et donner une valeur arrondie au dixième de α.
   c) Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ sur $]0\,;6]$.
2. Le coût mensuel moyen de fabrication de x tonnes (x compris entre 0 et 6) d'un certain produit dans une entreprise est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie sur $]0\,;6]$ par $C(x) = \dfrac{0{,}01\,\mathrm{e}^{x}+2}{x}$.
   a) Dériver C et montrer que, pour tout x dans $]0\,;6]$, on a $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   b) En déduire le tableau de variations de C sur $]0\,;6]$ et le nombre de tonnes de produit qu'il faut fabriquer mensuellement pour avoir un coût moyen minimal.

▶ Exercice n°24

Déterminer les primitives de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}$ $\quad I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \mathrm{e}^{2x+1}$ $\quad I = \mathbb{R}$
3. $f(x) = 6\mathrm{e}^{-3x+2}$ $\quad I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ $\quad I =]0\,;+\infty[$

► Exercice n°25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^{-x}+2x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

► Exercice n°26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 - 2\mathrm{e}^{-2x} + 5\mathrm{e}^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Montrer que $f(\ln 4) = \dfrac{1}{8} + \ln 4$.
2. Dériver f et montrer que pour tout x, $f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 4)(\mathrm{e}^x - 1)}{\mathrm{e}^{2x}}$.
3. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

► Exercice n°27

Soit f la fonction définie sur $[0\,;6]$ par $f(x) = 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$.
2. Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x + (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de f sur $[0\,;6]$.

► Exercice n°28

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x^2 + 4x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
3. Montrer que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-4x^2 - 12x - 13)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

► Exercice n°29

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2$.
   a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(1 + 2\mathrm{e}^{-x}\right)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
   a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que, pour tout réel, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.
   b) En utilisant le résultat de la question 1. b), déterminer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
   d) Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x$.

► Exercice n°30

On considère la proposition suivante : « *Il existe un réel x pour lequel $e^2 \times e^x = e^{2x}$* »

1. Écrire la négation de cette proposition.
2. La proposition est-elle vraie ou fausse ?