Dérivation, continuité et convexité

▶ Exercice n°1

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{1}{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

5) $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+6}$ 6) $f(x) = \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2}{x+1}$

7) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$ 8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x+1}$

9) $f(x) = (x+3)\sqrt{x}$ 10) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x-3}$

▶ Exercice n°2

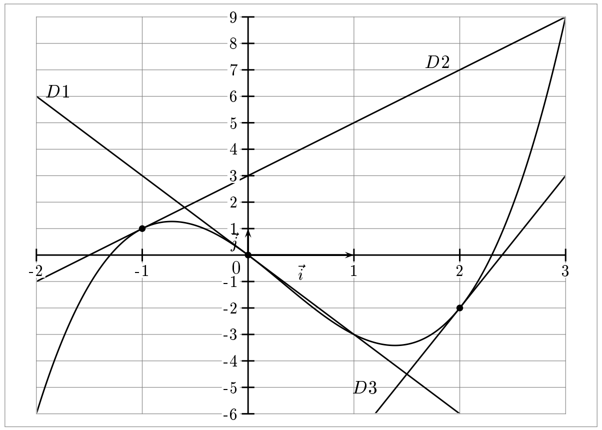
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 1 \quad a = 1$ 2) $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \quad a = 2$ 4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} \quad a = 4$

▶ Exercice n°3

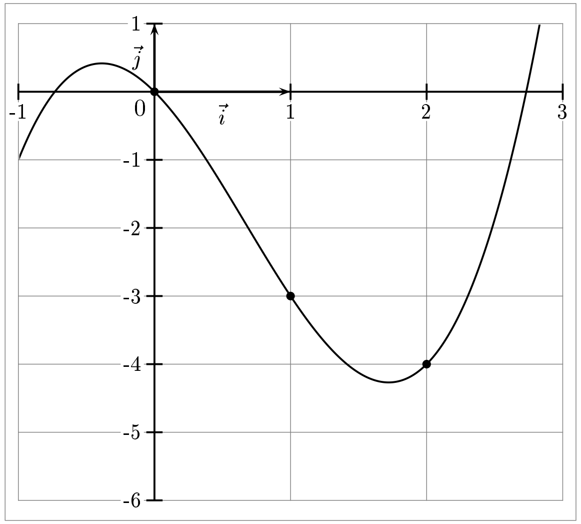
Sur le graphique ci-dessous, $D1$, $D2$ et $D3$ représentent les tangentes de la courbe représentative d'une fonction f aux points d'abscisses respectives 0, -1 et 2.



En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(2)$.

▶ Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $[-1{,}3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$ dont la courbe est donnée ci-dessous. Construire sur le graphique les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, 1 et 2.



▶ Exercice n°5

Soit f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $\dfrac{x+1}{x-1}$.

Déterminer les points éventuels de la courbe de f où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 et donner une équation de ces tangentes.

▶ Exercice n°6

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x}$.

Déterminer les points de la courbe représentative de f (dans un repère orthonormal) où la tangente :

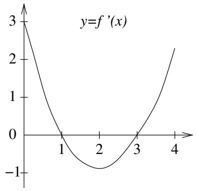
a) est horizontale.

b) admet -2 comme coefficient directeur.

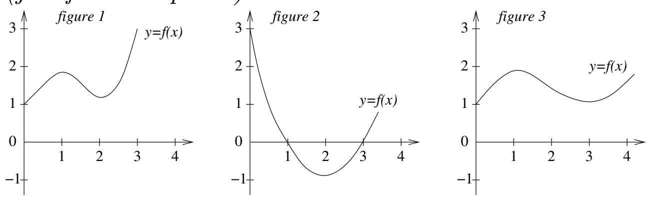
c) est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

▶ Exercice n°7

Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;\,4]$. La courbe représentative de **sa dérivée** est donnée ci-dessous :

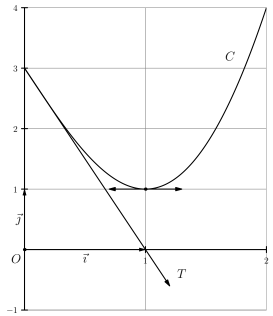


Parmi les trois figures ci-dessous, laquelle peut représenter la fonction f ? *(justifier sa réponse)*



▶ Exercice n°8

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ et T représente la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



1. D'après la courbe, déterminer $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. D'après la courbe, dresser le tableau de variations de f.
3. On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. Donner $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$, $g'(0)$ et $g'(1)$.
4. Dresser le tableau de variations de g.
5. Donner une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0.

▶ Exercice n°9

Une entreprise fabrique chaque jour une quantité x d'objets $(1 \leqslant x \leqslant 20)$.

1. La **recette** (en milliers d'euros) est donnée par $R(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+48x$.
   Étudier les variations de la fonction R sur $[1;20]$.
   En déduire la valeur de x pour laquelle la recette est maximale et donner la valeur en euros de cette recette maximale.
2. Le **bénéfice** (en milliers d'euros) est donnée par $B(x)=-x^3+\dfrac{21}{2}x^2$.
   Étudier les variations de la fonction B sur $[1;20]$.
   En déduire la valeur de x pour laquelle le bénéfice est maximal et donner la valeur en euros de ce bénéfice maximal.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

▶ Exercice n°10

Étudier les variations de la fonction f définie sur I dans les cas suivants :

1) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2-5x+1 \quad I=\mathbb{R}$

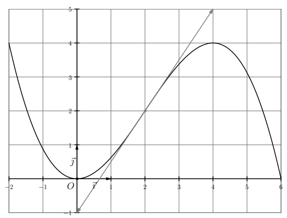
2) $f(x)=\dfrac{2x^2-x+2}{2x-1} \quad I=\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-6x+8} \quad I=]2\,;\,4[$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \quad I=\mathbb{R}$

▶ Exercice n°11

La courbe ci-dessous représente une fonction dérivable sur $[2;6]$.



Déterminer graphiquement les intervalles où la courbe semble convexe ou concave et préciser la présence éventuelle d'un point d'inflexion.

▶ Exercice n°12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-6x^2+3x+1$.
Calculer $f''(x)$. En déduire les intervalles où la fonction f est convexe ou concave et les coordonnées des points d'inflexion éventuels.

▶ Exercice n°13

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Dériver f et étudier ses variations sur $]1;+\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x)=7$ admet une unique solution x_0 dans $[2;3]$.
   Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par excès.

▶ Exercice n°14

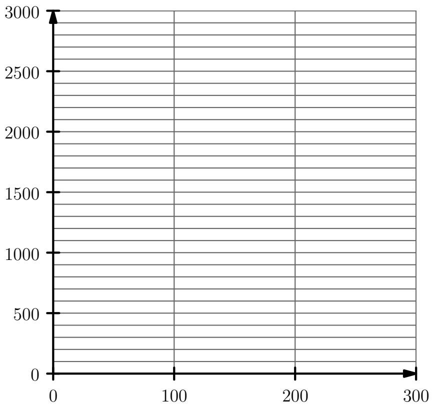
Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{x^2-3x+2}{x^3}$.

1. Dériver f et montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4}$.
2. En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution x_0 dans $[1;2]$. Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par défaut.
4. Soit D la droite d'équation $y = x - 1$.
   a) Montrer qu'il existe des points de C_f où la tangente est parallèle à D.
   b) Étudier la position relative de C_f et D.

▶ Exercice n°15

Un loueur de camions propose le tarif suivant qui dépend du nombre de kilomètres effectué pendant le trajet que souhaite effectuer le client :
• 10 euros par km pour les 100 premiers kilomètres *(tarif de base)*
• réduction de 20% sur le tarif de base pour la partie du trajet dépassant les 100 km

1. Expliquer pourquoi le prix à payer pour un trajet de 200 km est de 1800 euros.
2. On note $f(x)$ le prix à payer en euros pour parcourir un trajet de x km. Exprimer $f(x)$ en fonction de x dans les cas suivants :
   - Si $0 \leqslant x \leqslant 100$ alors $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   - Si $100 < x$ alors $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. La fonction f est-elle continue sur $[0;+\infty[$?
4. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



▶ Exercice n°16

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1. Déterminer les réels a, b, c et d sachant que f admet les propriétés suivantes :
   - la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0 a pour équation $y = -1$.
   - la courbe admet au point B d'abscisse $\dfrac{2}{3}$ une tangente horizontale.
   - la courbe admet au point C d'abscisse 1 une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 3$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $]1;2[$.
4. Afin de déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près, on cherche à créer un algorithme permettant de compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$y = f(x)$											

Combien de calculs sont nécessaires pour compléter le tableau ?
Compléter alors les lignes 7 et 14 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il réponde au problème.

```
 1: VARIABLES
 2: x EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: y EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: i EST_DU_TYPE NOMBRE
 5: DEBUT_ALGORITHME
 6:   x PREND_LA_VALEUR 1
 7:   POUR i ALLANT_DE 1 A ...
 8:     DEBUT_POUR
 9:     y PREND_LA_VALEUR pow(x,3)-pow(x,2)-1
10:     AFFICHER "Si x vaut "
11:     AFFICHER x
12:     AFFICHER " alors y vaut "
13:     AFFICHER y
14:     x PREND_LA_VALEUR x+...
15:     FIN_POUR
16: FIN_ALGORITHME
```