Calcul matriciel

▶ Exercice n°1

Calculer $A+B$ et $A-B$ dans les cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°2

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 7 & -5 & -2 \\ 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Calculer $3A-2B$ et $\dfrac{1}{2}A-B$.

▶ Exercice n°3

Déterminer la matrice M dans les cas suivants :

1. M est telle que $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}+M=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$
2. M est telle que $3M-\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=M+\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°4

Calculer AB dans les cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°5

Soit $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et BA.

▶ Exercice n°6

Calculer A^2 et A^3 avec $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°7

Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et AC. Que peut-on remarquer ?

▶ Exercice n°8

Préciser si B est l'inverse de A dans les cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ -5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°9

Soit $A=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 , A^3 et A^4.
2. En déduire, sans calculs, l'inverse de A et de A^2.

▶ Exercice n°10

Déterminer, en résolvant un système, l'inverse de A dans les cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°11

Vérifier que B est l'inverse de A et en déduire la résolution du système S dans les cas suivants :

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

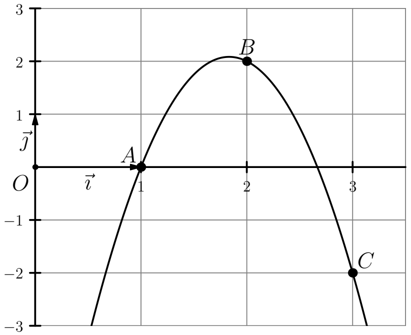
$$S:\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ x+4y+3z=3 \\ 2x+7y+6z=8 \end{cases}$$

2. $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&5&8\\3&3&5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&-7&11\\-1&12&-19\\0&-3&5\end{pmatrix}$

$S:\begin{cases}3x+2y+z=0\\5x+5y+8z=11\\3x+3y+5z=5\end{cases}$

► Exercice n°12

On considère, dans un repère orthonormé, les points $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. On cherche à déterminer une fonction f définie par $f(x)=ax^2+bx+c$ dont la courbe passe par ces trois points.



1. Montrer que a, b et c sont solutions du système $S:\begin{cases}a+b+c=0\\4a+2b+c=2\\9a+3b+c=-2\end{cases}$.

2. On pose $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\4&2&1\\9&3&1\end{pmatrix}$. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, A^{-1}.

3. Résoudre , à l'aide de A^{-1}, le système S. En déduire la fonction f dont la courbe passe par les points A, B et C.

► Exercice n°13

Une entreprise de vente par correspondance doit envoyer 32 paquets à 200 g, 28 à 1 kg et 12 à 3,5 kg. Le tableau suivant indique les tarifs en euros proposés par trois compagnies de livraison.

Poids maximum	200 g	1 kg	3,5 kg
Compagnie A	28	34	45
Compagnie B	30	33	42
Compagnie C	27	35	44

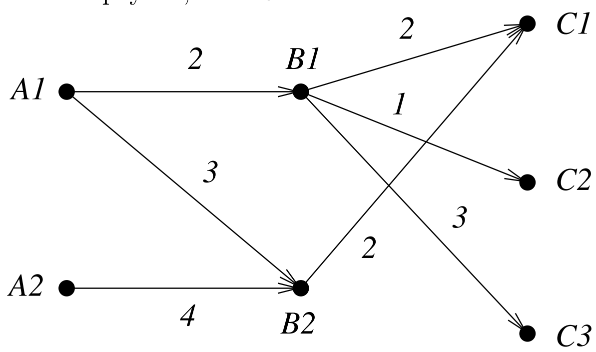
On note A la matrice $\begin{pmatrix}28&34&45\\30&33&42\\27&35&44\end{pmatrix}$.

1. Comment peut-on obtenir une matrice donnant le coût total de la livraison pour les trois compagnies ? (on suppose que tous les envois se font avec une seule compagnie)

2. Que représente la matrice $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}A$?

► Exercice n°14

Le schéma ci-dessous indique le nombre de liaisons quotidiennes entre les aéroports de trois pays A, B et C.



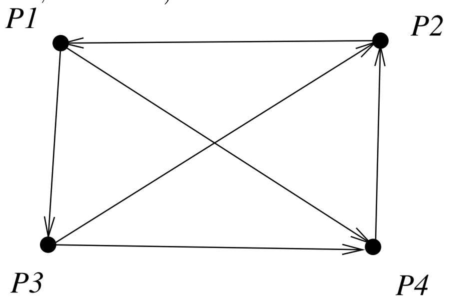
1. Indiquer dans les matrices ci-dessous, le nombre de liaisons entre les aéroports des pays A et B et celui entre les aéroports des pays B et C.

$M=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}B1&B2\end{array}\\\begin{bmatrix}\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\A1\\A2\end{array}$ et $N=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}C1&C2&C3\end{array}\\\begin{bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\B1\\B2\end{array}$

2. Calculer la matrice MN. Que représente-t-elle ?

▶ Exercice n°15

Le schéma ci-contre représente les voies à sens unique reliant quatre places ($P1$, $P2$, $P3$ et $P4$) d'une ville.



1. Peut-on partir de $P1$ et retourner à $P1$ en utilisant exactement 2 voies ?
2. De combien de façons peut-on aller de $P1$ à $P2$ en utilisant exactement 2 voies ?
3. De combien de façons peut-on aller de $P1$ à $P3$ en utilisant exactement 2 voies ?
4. De combien de façons peut-on aller de $P1$ à $P4$ en utilisant exactement 2 voies ?
5. Construire M, la matrice carrée de dimension 4 de telle façon que le coefficient de la i^e ligne et de la j^e colonne soit égal à 1 s'il y a une flèche de P_i vers P_j et 0 dans le cas contraire.

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} P1 & P2 & P3 & P4 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} & \begin{array}{c} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{array} \end{array}$$

6. Calculer M^2. Que retrouve-t-on à la première ligne de M^2 ?

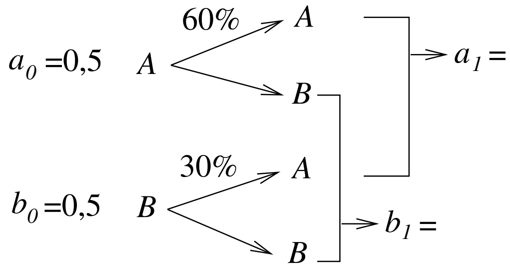
▶ Exercice n°16

Sur un marché, deux produits A et B sont en concurrence. On suppose que d'une année sur l'autre, 60 % des clients de la marque A lui reste fidèle tandis que 30 % des clients de la marque B passe à la marque A. *(il n'y a pas d'autres marques et tous les clients continuent à utiliser les deux produits)* .

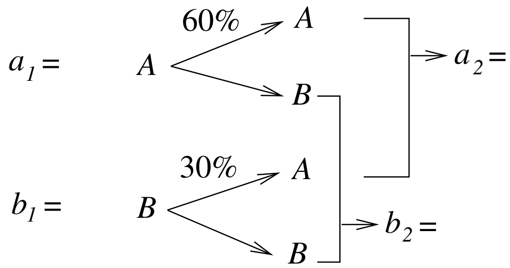
On note a_n et b_n les parts de marché des produits A et B en l'année $(2010 + n)$.

On suppose qu'en l'an 2010, les parts de marché des produits A et B étaient de 50 %. On a donc $a_0 = 0{,}5$ et $b_0 = 0{,}5$.

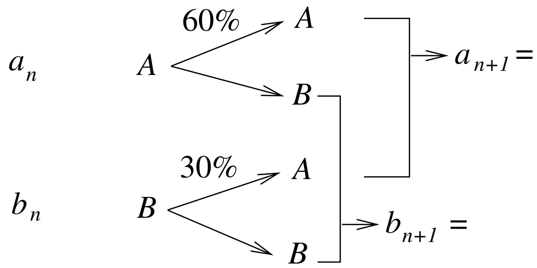
1. Á l'aide du schéma ci-dessous, calculer a_1 et b_1, les parts de marché des produits A et B en 2011.



2. Á l'aide du schéma ci-dessous, calculer a_2 et b_2, les parts de marché des produits A et B en 2012.



3. De façon générale, déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.



4. En déduire les coefficients à inclure dans la matrice ci-dessous pour que le calcul soit correct :
$(a_{n+1} \ b_{n+1}) = (a_n \ b_n) \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$.
5. On cherche à déterminer l'évolution des parts de marché au bout de plusieurs années. Pour cela, on va utiliser deux méthodes différentes.

a) **Méthode 1 : en utilisant les matrices**
On note M la matrice déterminée à la question précédente. On a :
$(a_1\ b_1) = (a_0\ b_0)\ M$;
$(a_2\ b_2) = (a_1\ b_1)\ M = (a_0\ b_0)\ M\,M = (a_0\ b_0)\ M^2$;
$(a_3\ b_3) = (a_2\ b_2)\ M = (a_0\ b_0)\ M^2\,M = (a_0\ b_0)\ M^3$; etc.
Calculer, à l'aide de la calculatrice, M^5. En déduire les parts de marché des produits A et B en 2015.

b) **Méthode 2 : en utilisant un algorithme**
Justifier que, pour tout entier n, on a $b_n = 1 - a_n$.
Compléter les lignes 6 et 7 pour que l'algorithme ci-dessous permette de calculer les parts de marché des produits A et B en 2018.

```
 1: DEBUT_ALGORITHME
 2:   a ← 0.5
 3:   b ← 0.5
 4:   POUR n ALLANT_DE 1 A ...
 5:     DEBUT_POUR
 6:     a ← ..........
 7:     b ← 1-a
 8:     FIN_POUR
 9:   AFFICHER a
10:   AFFICHER b
11: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°17

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. « On peut calculer $A + B$ » .
2. « On peut calculer $A + C$ » .
3. « On peut calculer AB » .
4. « On peut calculer BC » .
5. « On a $AB = BA$ » .
6. « On a $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 16 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ » .
7. « On a $A^2 = \begin{pmatrix} 23 & 56 \\ 16 & 39 \end{pmatrix}$ ».