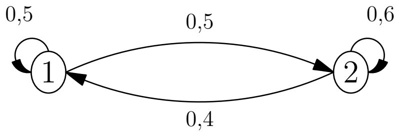
Graphes probabilistes

▶ Exercice n°1

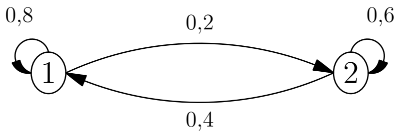
On considère le graphe ci-dessous :



1. Justifier qu'il s'agit d'un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition M.
2. On suppose que l'état probabiliste initial est $P_0 = (a_0\ b_0) = (1\ 0)$.
   a) Calculer l'état probabiliste $P_2 = (a_2\ b_2)$.
   b) Déterminer l'état stable $P = (x\ y)$.

▶ Exercice n°2

On considère le graphe ci-dessous :



1. Justifier qu'il s'agit d'un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition M.
2. On suppose que l'état probabiliste initial est $P_0 = (a_0\ b_0) = (0\ 1)$.
   a) Calculer l'état probabiliste $P_2 = (a_2\ b_2)$.
   b) Déterminer l'état stable $P = (x\ y)$.

▶ Exercice n°3

Un guide classe les campings selon deux catégories A et B. Chaque année, la probabilité qu'un camping de la catégorie A passe dans la catégorie B est de 0,6 et la probabilité qu'un camping de la catégorie B passe dans la catégorie A est de 0,2.

On note a_n, la probabilité qu'un camping soit classé dans la catégorie A et b_n, la probabilité qu'un camping soit classé dans la catégorie B en l'année $(2010 + n)$.

On suppose qu'en 2010, $3/4$ des campings sont classés dans la catégorie A. On a donc $a_0 = 0{,}75$ et $b_0 = 0{,}25$.

On note :

- $P_n = (a_n\ b_n)$, l'état probabiliste correspondant à l'année $(2010 + n)$;
- $P = (x\ y)$ l'état stable avec $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

1. Construire le graphe probabiliste traduisant la situation (on notera 1 le sommet correspondant à la catégorie A et 2 le sommet correspondant à la catégorie B).
2. Donner la matrice de transition M.
3. Calculer P_3. En déduire la probabilité qu'un camping soit classé dans la catégorie A en 2013.
4. Déterminer l'état stable P. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

▶ Exercice n°4

L'évolution mensuelle du compte bancaire d'une personne est telle que :

- Lorsque son compte est « dans le vert » à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est de 0,4 ; la probabilité qu'il soit « dans le rouge » est de 0,6.
- Lorsque son compte est « dans le rouge » à la fin d'un mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est de 0,35 ; la probabilité qu'il soit « dans le vert » est de 0,65.

On note :

- a_n, la probabilité que le compte soit « dans le vert » à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois ;
- b_n, la probabilité que le compte soit « dans le rouge » à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois ;
- $P_n = (a_n\ b_n)$, l'état probabiliste à la fin du $n^{\text{ième}}$ mois ;
- $P = (x\ y)$ l'état stable avec $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

On suppose que $P_0 = (1\ 0)$ (le compte est « dans le vert » au début).

1. Construire le graphe probabiliste traduisant la situation (on notera 1 le sommet « vert » et 2 le sommet « rouge »).
2. Donner la matrice de transition M.
3. a) Calculer P_2. En déduire la probabilité que le compte soit « dans le vert » à la fin du deuxième mois.
   b) Déterminer l'état stable P. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
4. a) En utilisant que $P_{n+1} = P_n\, M$ et que $a_n + b_n = 1$, déterminer a_{n+1} en fonction de a_n.
   b) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 0{,}52$ est une suite géométrique de raison $q = -0{,}25$.
   c) En déduire u_n, puis a_n en fonction de n.
   d) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

► **Exercice n°5**

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82 % de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20 % des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante.
- 5 % des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

On note :

- A : « L'employé travaille le matin »
- B : « L'employé travaille l'après-midi »

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
3. La semaine notée 0, semaine de la décision, 60 % des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi.
   a) Donner la matrice ligne notée P_0 décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise.
   b) Calculer la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, deuxième semaine après la prise de décision.
4. Soit $\mathrm{P} = (x\ y)$ l'état probabiliste stable.
   a) Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0{,}8x + 0{,}95y$.
   b) Déterminer x et y.
   c) Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse.

► **Exercice n°6**

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit qu'ils nomment respectivement Aurore et Boréale.

Afin de promouvoir celui-ci, chacun organise une campagne de publicité.

L'un d'eux contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages hebdomadaires.

Chaque semaine, il interroge les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10 % des personnes préférant Aurore et 15 % des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

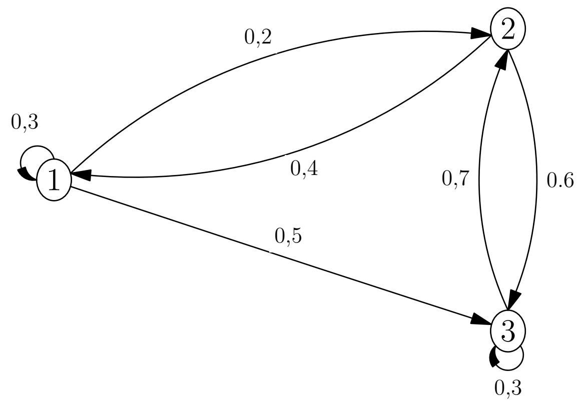
La semaine du début de la campagne est notée semaine 0.

Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n\ b_n)$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n la probabilité que cette personne préfère Boréale la semaine n.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale.
3. a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
   b) Montrer que la matrice ligne P_1 est égale à $(0{,}3\ 0{,}7)$.
4. a) Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n.
   b) En déduire la matrice ligne P_3. Interpréter ce résultat.
5. Soit $P = (x\ y)$ la matrice ligne de l'état probabiliste stable.
   a) Déterminer x et y.
   b) Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ? Justifier.

► **Exercice n°7**

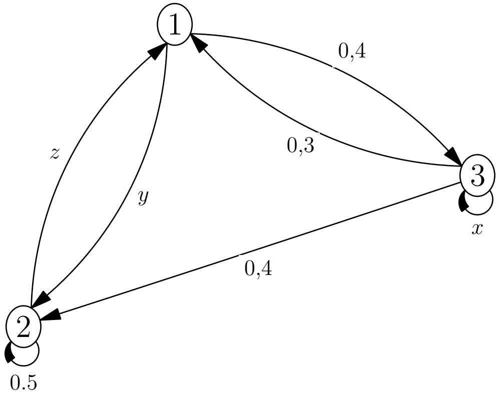
On considère le graphe ci-dessous :



1. Justifier qu'il s'agit d'un graphe probabiliste et donner sa matrice de transition M.
2. On suppose que l'état probabiliste initial est $P_0 = (1\ 0\ 0)$.
3. Calculer les états probabilistes P_2 et P_3.

▶ Exercice n°8

1. Déterminer les valeurs de x, y et z pour que le graphe ci-dessous soit un graphe probabiliste.



2. Quelle est la matrice de transition du graphe ?

▶ Exercice n°9

Une épidémie sévit sur une ile isolée. Chaque habitant est à un moment donné dans l'un des trois états suivants :

- S : ni infecté, ni immunisé ;
- I : infecté ;
- R : immunisé.

D'un mois à l'autre, un habitant peut voir son état changer avec les probabilités suivantes :

- s'il est immunisé, il le reste avec une probabilité égale à 0,8, et il devient « ni infecté, ni immunisé » avec une probabilité égale à 0,2 ;
- s'il est infecté, il le reste avec une probabilité égale à 0,1, et il devient « immunisé » avec une probabilité égale à 0,9 ;
- s'il est ni infecté, ni immunisé, il le reste avec une probabilité égale à 0,3, et il devient « infecté » avec une probabilité égale à 0,7.

On note :

- s_0 la probabilité qu'un habitant soit ni infecté, ni immunisé au début de l'épidémie et s_n la probabilité qu'il le soit au bout de n mois.
- i_0 la probabilité qu'un habitant soit infecté au début de l'épidémie et i_n la probabilité qu'il le soit au bout de n mois.
- r_0 la probabilité qu'un habitant soit immunisé au début de l'épidémie et r_n la probabilité qu'il le soit au bout de n mois.
- $P_0 = (s_0\ i_0\ r_0)$, l'état probabiliste initial et $P_n = (s_n\ i_n\ r_n)$, l'état probabiliste au bout de n mois.

1. Représenter la situation avec un graphe probabiliste de sommets S, I et R dont on donnera la matrice de transition.
2. On sait qu'au début de l'épidémie, 1% de la population était infectée et 5% était immunisée. Donner l'état probabiliste initial P_0.
3. Calculer l'état probabiliste au bout de trois mois. En déduire la probabilité qu'un habitant soit infecté au bout de trois mois.
4. La matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{18}{95} & \frac{14}{95} & \frac{63}{95} \end{pmatrix}$ peut-elle représenter l'état stable ?