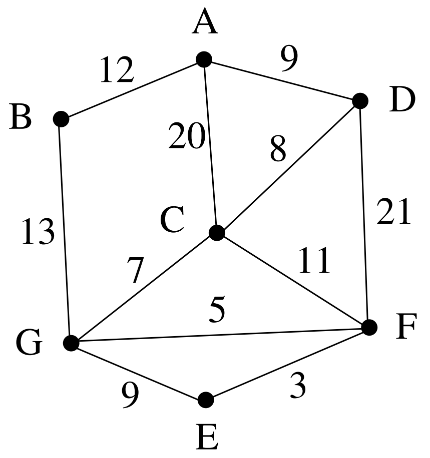
Graphes (deuxième partie)

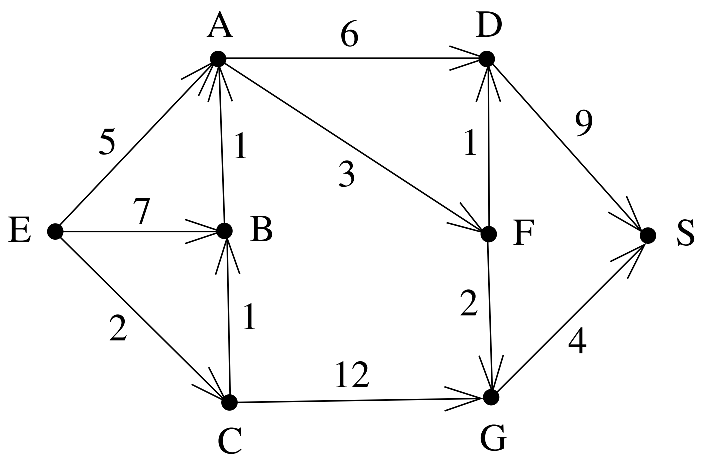
▶ Exercice n°1

Déterminer la plus courte chaîne entre les sommets A et E dans le graphe pondéré ci-dessous.



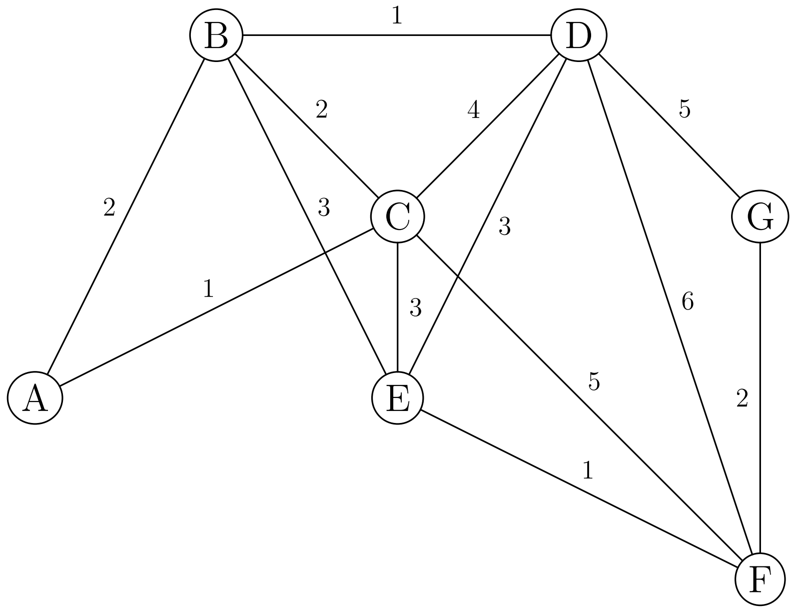
▶ Exercice n°2

Déterminer la plus courte chaîne entre les sommets E et S dans le graphe pondéré ci-dessous.



▶ Exercice n°3

Le graphe ci-dessous représente le plan d'une ville.



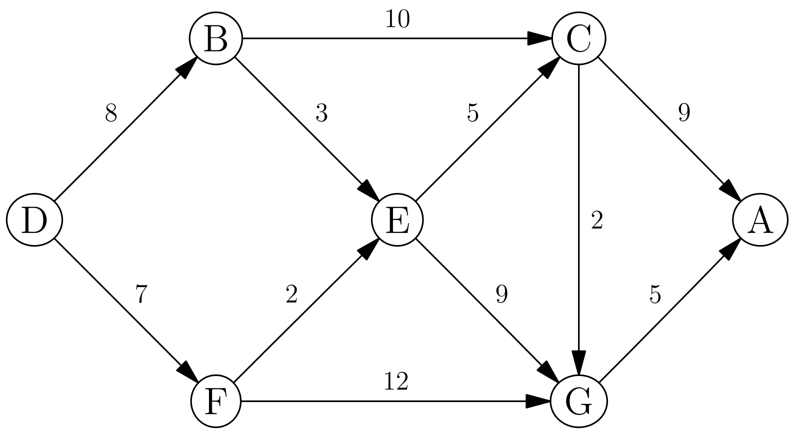
Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.
Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics.
Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.

1. On s'intéresse au graphe non pondéré.
   a) Ce graphe est-il connexe ?
   b) Ce graphe est-il complet ?
   c) Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?
   d) Ce graphe admet-il un cycle eulérien ?
   e) Déterminer l'ordre des sous-graphes complets ayant le plus grand nombre de sommets.
2. On s'intéresse au graphe pondéré.
   Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G.
   (la réponse sera justifiée par un algorithme.)

▶ **Exercice n°4**

Le graphe ci-dessous représente un réseau de cours d'eau utilisé pour des promenades en barque :

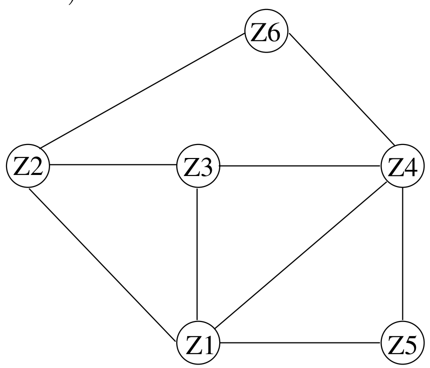
- Le sommet D représente la ligne de départ et le sommet A, la ligne d'arrivée.
- Une flèche indique le sens d'écoulement de l'eau ;
- Le nombre sur chaque arête indique la durée moyenne d'une promenade entre deux jonctions.



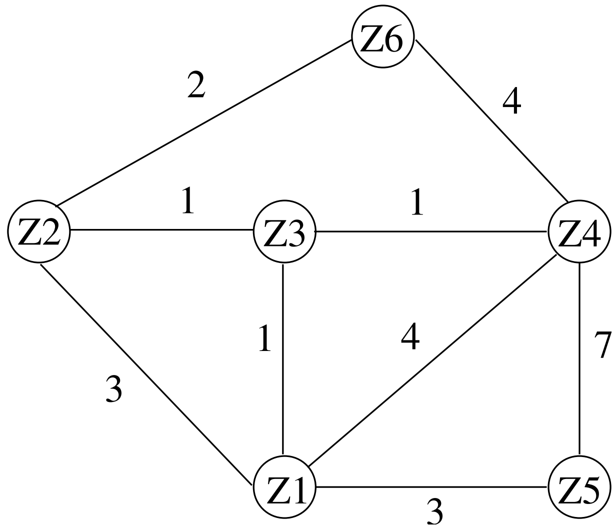
Déterminer le circuit qui prend le moins de temps pour aller de D en A.

▶ **Exercice n°5**

Un camp de vacances est composé de six zones (Z1, Z2, Z3, Z4, Z5 et Z6) reliées entre elles par des allées selon le graphe ci-dessous (les arêtes représentent les allées) :



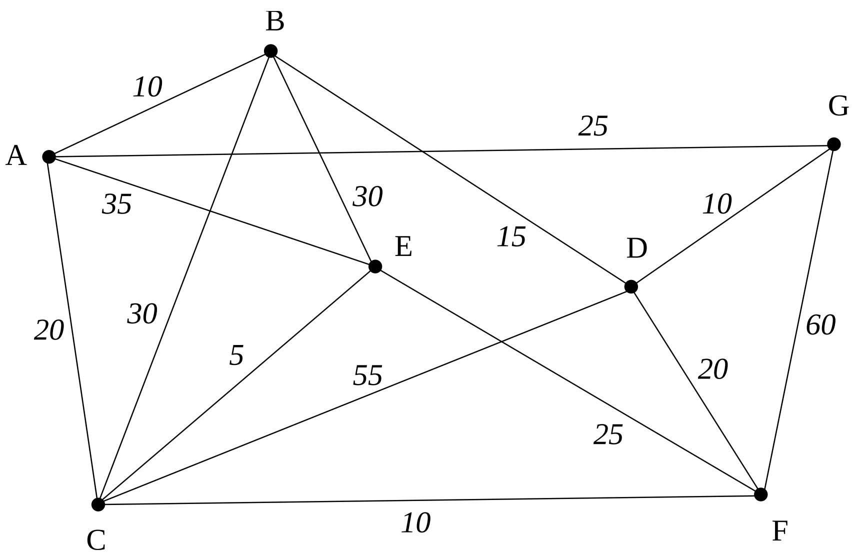
1. Un vacancier peut-il parcourir toutes les allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois ?
2. On note M la matrice associée au graphe établie dans l'ordre suivant : Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6. *(la matrice M n'est pas demandée)*
   On donne la cinquième ligne de la matrice M^3 : $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
   En déduire le nombre de chemins possibles pour aller de la zone Z5 à la zone Z4 en passant par trois allées exactement.
3. On a ajouté ci-dessous sur les arêtes du graphe le temps moyen en minutes qu'il faut à un piéton pour passer d'une zone à une autre en empruntant les allées.



Déterminer à l'aide de l'algorithme de Dijkstra le chemin qui prend le moins de temps à un piéton pour aller de la zone 5 à la zone 6.

► Exercice n°6

Une compagnie d'autocars relie 7 villes (notées de A à G) selon un réseau représenté par le graphe ci-dessous avec la convention suivante : une arête représente une ligne directe entre deux villes et le nombre sur chaque arête représente le prix en euros que doit payer un client pour un trajet direct entre les deux villes.



1. Un contrôleur est chargé de vérifier les billets des usagers du réseau. Peut-il partir d'une ville et arriver dans une autre ville en empruntant chaque ligne directe une fois et une fois seulement ? Si oui, préciser les deux villes pour lesquelles c'est possible. *(justifier votre réponse)*

2. On note M la matrice associée au graphe et on donne :
$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 14 & 7 & 11 & 7 & 10 \\ 11 & 8 & 12 & 12 & 12 & 8 & 6 \\ 14 & 12 & 12 & 13 & 12 & 13 & 6 \\ 7 & 12 & 13 & 6 & 8 & 10 & 9 \\ 11 & 12 & 12 & 8 & 8 & 12 & 6 \\ 7 & 8 & 13 & 10 & 12 & 6 & 9 \\ 10 & 6 & 6 & 9 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$
(M n'est pas demandée. M et M^3 respectent l'ordre alphabétique des sommets.)
Un chauffeur de la compagnie doit partir chaque matin de la ville C et y revenir à la fin de sa journée de travail tout en assurant le service sur exactement trois lignes du réseau. Déterminer, à l'aide de M^3, le nombre de trajets possibles qu'il peut effectuer.

3. Un client souhaite aller de la ville E à la ville G. Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le parcours que doit emprunter ce client afin de minimiser le coût total du trajet.

4. La compagnie souhaite éditer un plan du réseau sur lequel deux villes non reliées par une ligne directe seraient représentées par deux couleurs différentes tout en utilisant le moins de couleurs possibles. Justifier qu'au moins quatre couleurs seront nécessaires.