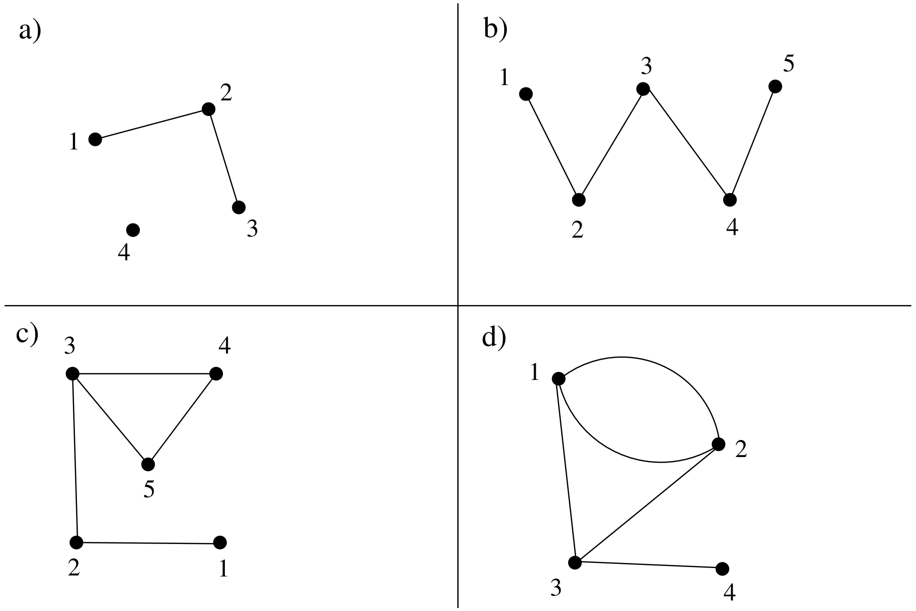
Graphes (première partie)

▶ Exercice n°1
Pour chacun des graphes suivants, donner l'ordre du graphe, la matrice associée et préciser dans un tableau le degré de chaque sommet.



▶ Exercice n°2

Construire un graphe dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°3

Un graphe a pour matrice associée $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Quel est l'ordre du graphe ?
2. Préciser dans un tableau le degré de chaque sommet.
3. Quel est le nombre d'arêtes du graphe ?
4. Construire un graphe pouvant admettre M comme matrice associée.

▶ Exercice n°4
Peut-il exister un graphe de degré 6 dont les degrés des sommets sont donnés ci-dessous ?

Sommet	A	B	C	D	E	F
Degré	2	4	5	3	4	3

▶ Exercice n°5
Un graphe possède quatre sommets A, B, C et D et comporte 11 arêtes.
Le sommet A est de degré 3, le sommet B est de degré 4 et le sommet C est de degré 5.
Quel est le degré du sommet D ?

▶ Exercice n°6
Un graphe complet est d'ordre 10.

1. Quel est le degré de chacun des sommets ?
2. Combien d'arêtes le graphe comporte-t-il ?

▶ Exercice n°7
Un tournoi d'escrime réunit six joueurs numérotés de 1 à 6. Chaque joueur rencontre une fois et une seule les cinq autres.

1. Représenter cette situation par un graphe dans lequel les sommets représentent les joueurs et les arêtes représentent une rencontre.
2. Quel est le degré de chacun des sommets ?
   Quel est le nombre total d'arêtes ?
   Le graphe est-il complet ?
3. Sachant que trois assauts peuvent se dérouler en même temps, déterminer un calendrier possible du tournoi. *(on pourra s'aider en marquant au fur et à mesure les arêtes correspondantes à une série de trois assauts)*

▶ Exercice n°8
Un tournoi de football réunit sept équipes pendant un week-end. Compte tenu des contraintes de temps, il est impossible de faire jouer chaque équipe contre les six autres. En utilisant un graphe, déterminer s'il est possible de ne faire jouer à chaque équipe que cinq matches.

► Exercice n°9

Une personne souhaiterait inviter six amis numérotés de 1 à 6. Certains de ces six amis ont des relations difficiles (voir tableau).

amis	1	2	3	4	5	6
relations difficiles avec	2	1,5,6	5	5	2,3,4,6	2,5

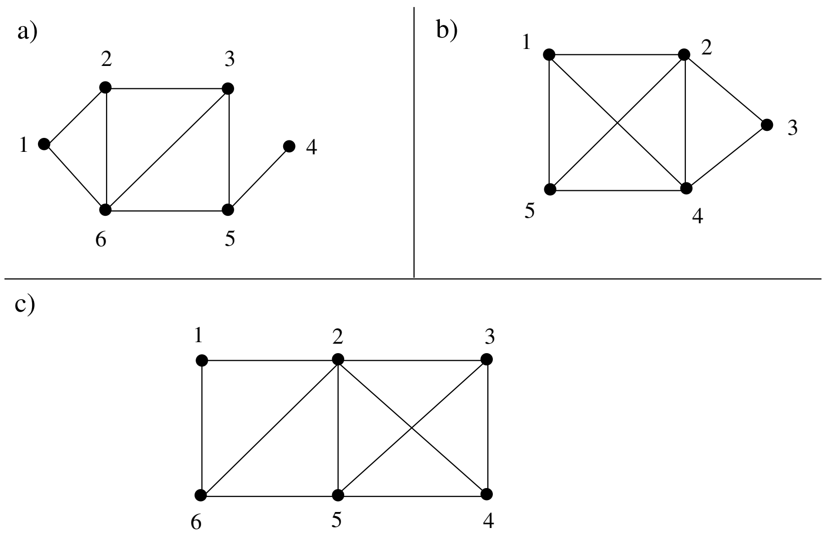
1. Représenter cette situation par un graphe dans lequel une relation difficile est représentée par une arête.

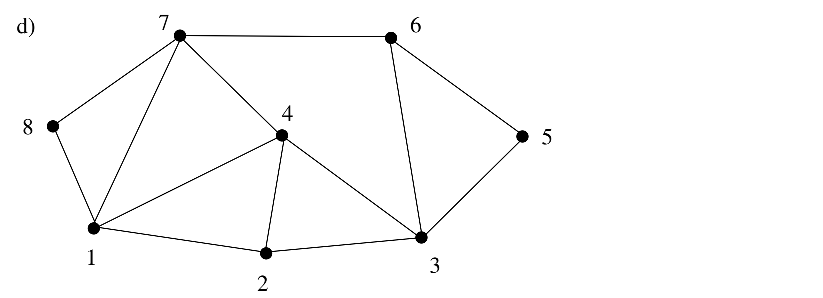
2. Quel est le degré de chacun des sommets ?
   Quel est le nombre total d'arêtes ?
   Le graphe est-il complet ?

3. Combien de personnes au maximum peuvent-elles être invitées sans risque de mauvaise ambiance ?

► Exercice n°10

Dans chacun des cas suivants, déterminer le nombre maximal de sommets que l'on peut utiliser pour créer un sous-graphe complet :





► Exercice n°11

Une chaîne de cinq magasins numérotés de 1 à 5 décide d'ouvrir ces magasins en nocturne avec les contraintes suivantes :

- Le magasin 1 peut être ouvert en même temps que la magasin 5 ;
- Le magasin 2 peut être ouvert en même temps que les magasins 3, 4 et 5 ;
- Le magasin 3 peut être ouvert en même temps que le magasin 5 ;
- Les autres combinaisons ne sont pas possibles.

1. Représenter cette situation par un graphe dans lequel on relie les magasins pouvant être ouverts ensemble par une arête.
2. Quel est le nombre maximal de magasins pouvant être ouvert en nocturne ? Citer ces magasins.

► Exercice n°12

Dans le tableau ci-dessous, P1, P2, P3, P4, P5 et P6 représentent six poissons et une croix signifie que les poissons ne peuvent pas cohabiter dans le même aquarium.

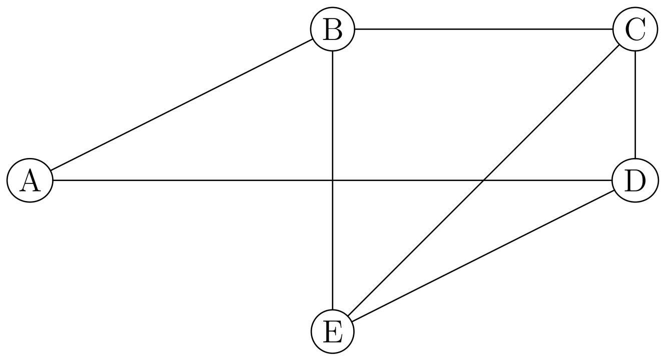
	P1	P2	P3	P4	P5	P6
P1		x	x		x	
P2	x		x	x	x	x
P3	x	x			x	x
P4		x				x
P5	x	x	x			x
P6		x	x	x	x	

1. Représenter la situation par un graphe en reliant les poissons ne pouvant pas cohabiter dans le même aquarium.

2. Déterminer le nombre maximal de sommets que l'on peut utiliser pour créer un sous-graphe complet.
3. Expliquer pourquoi il faut au moins quatre aquariums pour répartir les poissons.

► Exercice n°13

Dans le graphe suivant :

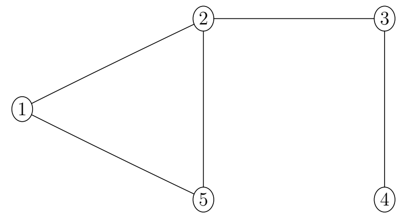


1. On considère la chaîne A-D-C-B-E-D.
   a) Quelle est la longueur de cette chaîne ?
   b) Cette chaîne est-elle fermée ?
   c) Cette chaîne est-elle un cycle ?
2. On considère la chaîne A-B-C-D-E-B-A.
   a) Quelle est la longueur de cette chaîne ?
   b) Cette chaîne est-elle fermée ?
   c) Cette chaîne est-elle un cycle ?
3. Donner un cycle d'origine A.
4. Donner un cycle de longueur 5 partant de E.
5. Donner une chaîne fermée de longueur 5 partant de E et qui ne soit pas un cycle.

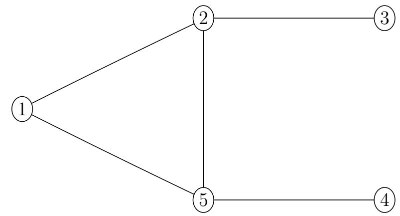
► Exercice n°14

Dans chacun des cas suivants, indiquer si le graphe admet au moins une chaîne eulérienne. Dans l'affirmative en donner une et préciser s'il s'agit ou non d'un cycle eulérien.

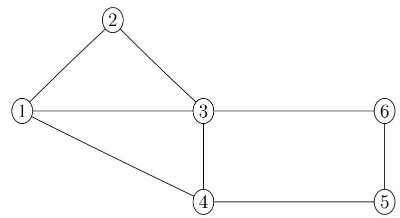
1.



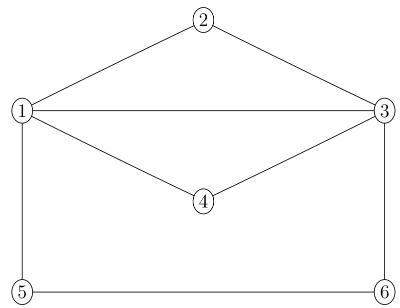
2.



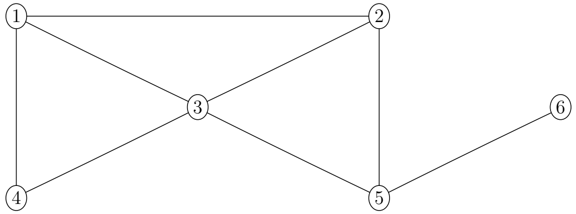
3.



4.

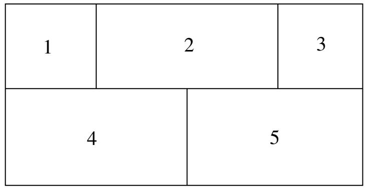


5.



▶ Exercice n°15

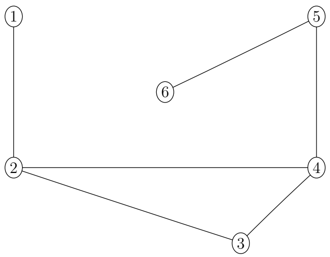
Le schéma ci-dessous symbolise cinq pays avec leurs frontières.



1. Représenter cette situation par un graphe dans lequel les sommets représentent les pays et les arêtes représentent les frontières.
2. Le graphe obtenu est-il connexe ?
3. En utilisant ce graphe, déterminer :
   a) s'il est possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule.
   b) s'il est possible de partir d'un pays et d'arriver dans un autre pays en franchissant chaque frontière une fois et une seule.

▶ Exercice n°16

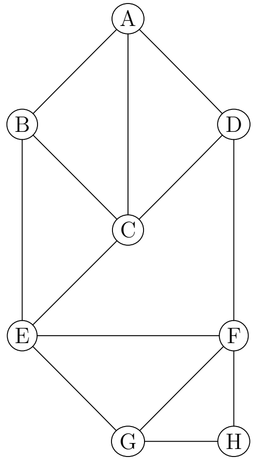
On considère le graphe G ci-dessous :



1. Justifier que G n'admet pas de chaîne eulérienne.
2. Est-il possible de rajouter une arête pour le graphe G' obtenu admette une chaîne eulérienne ?

▶ Exercice n°17

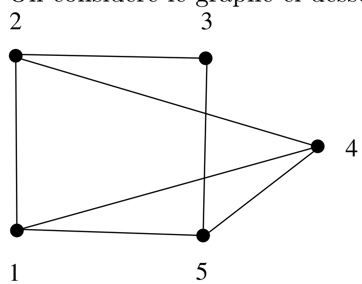
Un site internet comporte huit pages notées de A à H reliées entre elles suivant le graphe ci-dessous :



Le webmestre souhaite tester la validité des liens de pages. En partant de la page A, peut-il trouver un parcours passant une fois et une seule par tous les liens de pages ?

▶ Exercice n°18

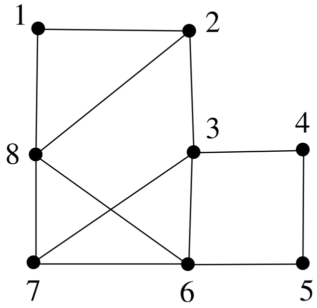
On considère le graphe ci-dessous :



1. Est-il possible de partir d'un sommet et d'arriver à un autre en parcourant une fois et une fois seulement chaque arête du graphe ?
2. Donner la liste complète des chaînes de longueur 3 reliant les sommets 1 et 5.
3. Déterminer la matrice associée M de ce graphe.
4. Calculer M^3. En déduire le nombre de chaînes de longueur 3 reliant le sommet 4 à lui-même.

► Exercice n°19

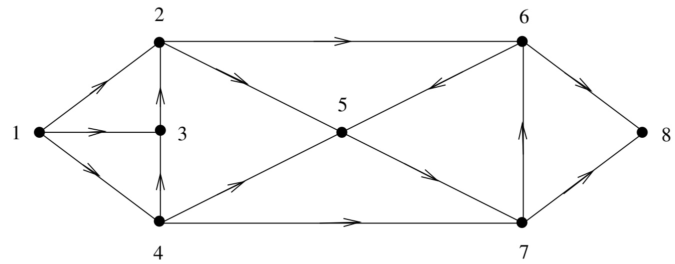
Les sommets du graphe ci-dessous représentent huit bureaux d'une entreprise et une arête indique la présence d'une porte commune entre deux bureaux.



1. Quelle est la distance entre les sommets 1 et 5 ? Que représente ce nombre ?
2. Est-il possible de partir d'un bureau et d'y revenir après avoir franchi chaque porte une fois et une seule ?
3. Est-il possible de partir d'un bureau, de franchir chaque porte une fois et une seule et de terminer en un autre bureau ? Si oui, citer deux bureaux pour lesquels c'est possible.
4. On note M la matrice associée à ce graphe et on admet que la cinquième ligne de M^3 donne : (1,3,1,4,0,6,3,1).
   a) Est-il possible de partir du bureau 5 et d'y revenir en franchissant trois portes ?
   b) De combien de façons peut-on partir du bureau 5 et arriver au bureau 6 en franchissant trois portes ?
   c) Citer tous les chemins possibles pour aller du bureau 5 au bureau 6 en franchissant trois portes.
5. Le décorateur de l'entreprise souhaite que deux bureaux ayant une porte commune n'aient pas la même couleur de moquette. Justifier qu'il faudra au moins 3 couleurs différentes.

► Exercice n°20

Un office de tourisme propose des circuits de visite représentés par le graphe orienté ci-dessous :



1. Citer un circuit permettant d'aller du sommet 1 au sommet 8 en 8 étapes.
2. On note M la matrice associée au graphe. La première ligne de M^8 est : (0,0,0,0,3,3,3,5).
   En déduire le nombre total de circuits permettant d'aller du sommet 1 au sommet en 8 étapes.

► Exercice n°21

Cinq individus (notés A, B, C, D et E) travaillent dans un même bureau. On a demandé à chaque individu de désigner ses collègues préférés (lui-même étant exclu) et les résultats ont été récapitulés ci-dessous :
- Collègues préférés de A : B,C,E
- Collègues préférés de B : A,C,D
- Collègues préférés de C : aucun
- Collègues préférés de D : B,C
- Collègues préférés de E : D

1. Construire un graphe orienté dont les sommets représentent les individus et dont une arête signifie que l'individu de départ a choisi l'individu d'arrivée comme collègue préféré. (un tel graphe est appelé sociogramme).
2. Pourquoi le graphe ne comporte-t-il pas de boucles ?
3. Comme peut-on déterminer le collègue le plus « populaire » ?

► Exercice n°22

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et note G le graphe associé à cette matrice. (on ne demande pas de construire G)

1. Le graphe G est-il orienté ?
2. Le graphe G admet-il des boucles ?

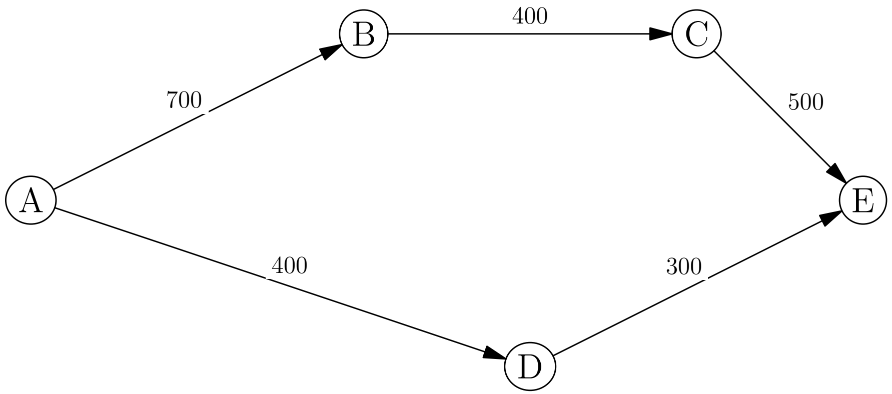
► Exercice n°23

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Construire un graphe orienté dont M est la matrice associée. (les sommets seront notés A, B, C et D)
2. En utilisant uniquement le graphe, déterminer s'il peut y avoir des chaînes de longueur 4 partant de A ? Qu'en est-il pour les autres sommets ?
3. En déduire, sans calculs, M^4.

► Exercice n°24

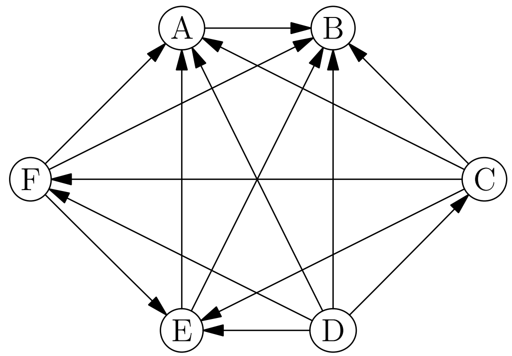
Le graphe orienté ci-dessous représente un réseau de rues à sens unique. Le nombre indiqué sur chaque arête représente le flux maximum de véhicules pouvant y circuler par heure sans provoquer de bouchons.



1. Quel est le nombre maximum de véhicules que l'on peut faire partir de A en passant par B et C afin qu'ils arrivent en E sans risquer d'embouteillages ?
2. Quel est le nombre maximum de véhicules que l'on peut faire partir de A en passant par D afin qu'ils arrivent en E sans risquer d'embouteillages ?
3. Quel est le nombre total de véhicules que l'on peut faire partir de A pour qu'ils arrivent à E sans qu'il y ait de bouchons ?

► Exercice n°25

Dans le graphe orienté ci-dessous :



- chaque sommet représente une équipe de rugby lors d'une poule d'élimination ;
- une arête indique que l'équipe de départ a battu l'équipe d'arrivée.

1. Déterminer la matrice M associée à ce graphe.
2. Que représente la somme des coefficients de chaque ligne de M ?
3. Que représente la somme des coefficients de chaque colonne de M ?
4. Une victoire rapporte 2 points et une défaite 0 point. Déterminer le classement final de cette poule.

► Exercice n°26

Déterminer si les mots « ebcs » , « ebacs » , « dts » , « ebbats » et « eats » sont reconnus par le graphe étiqueté ci-dessous :