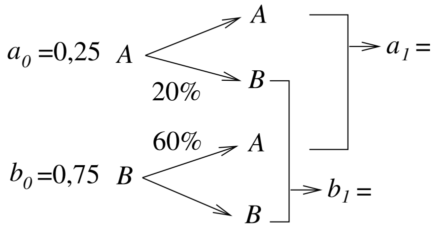
► Exercice n°1

Deux candidats A et B sont seuls en lice lors d'une élection. Lors de chaque semaine de la campagne électorale, 20 % des électeurs favorables au candidat A changent d'avis et deviennent favorables au candidat B et 60 % des électeurs favorables au candidat B changent d'avis et deviennent favorables au candidat A.

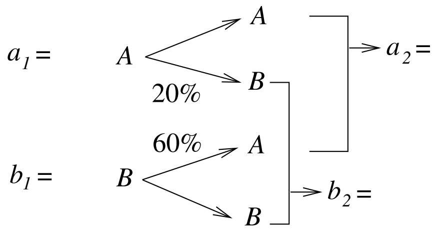
On note a_0, la proportion d'électeurs favorables au candidat A et b_0, la proportion d'électeurs favorables au candidat B au début de la campagne et on suppose que l'on a $a_0 = 0{,}25$ et $b_0 = 0{,}75$.

On note a_n, la proportion d'électeurs favorables au candidat A et b_n, la proportion d'électeurs favorables au candidat B à la fin de la $n^{\text{ième}}$ semaine de campagne.

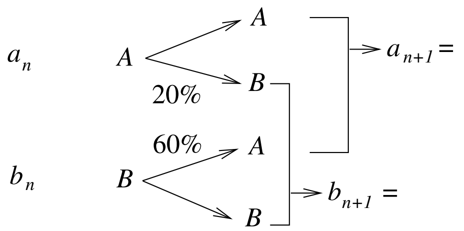
1. À l'aide du schéma ci-dessous, calculer a_1 et b_1, les proportions d'électeurs favorables aux candidats A et B à la fin de la $1^{\text{ière}}$ semaine de campagne..



2. Á l'aide du schéma ci-dessous, calculer a_2 et b_2, les proportions d'électeurs favorables aux candidats A et B à la fin de la $2^{\text{ième}}$ semaine de campagne..



3. De façon générale, déterminer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.



4. En déduire les coefficients à inclure dans la matrice ci-dessous pour que le calcul soit correct :
$(a_{n+1}\ b_{n+1}) = (a_n\ b_n)\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$.

5. On note M la matrice déterminée à la question précédente. On a :
$(a_1\ b_1) = (a_0\ b_0)\ M$;
$(a_2\ b_2) = (a_1\ b_1)\ M = (a_0\ b_0)\ M\,M = (a_0\ b_0)\ M^2$;
$(a_3\ b_3) = (a_2\ b_2)\ M = (a_0\ b_0)\ M^2\,M = (a_0\ b_0)\ M^3$; etc.
En calculant M^4, déterminer les proportions d'électeurs favorables aux candidats A et B à la fin de la $4^{\text{ième}}$ semaine de campagne.. *(on indiquera M^4 - les résultats seront donnés à 10^{-4} près)*

► Exercice n°2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 9 & -11 & 3 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et on admet que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant A^{-1}, résoudre le système $S : \begin{cases} 9x - 11y + 3z = 15 \\ 4x - 5y + z = 6 \\ 5x - 6y + z = 7 \end{cases}$. *(on utilisera la rédaction du cours)*
2. Déterminer, en justifiant sa réponse, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :
   a) « On peut calculer AC »
   b) « On peut calculer CA »
   c) « On peut calculer C^2 »
3. En utilisant A^{-1}, déterminer la matrice D telle que $DA = C$.