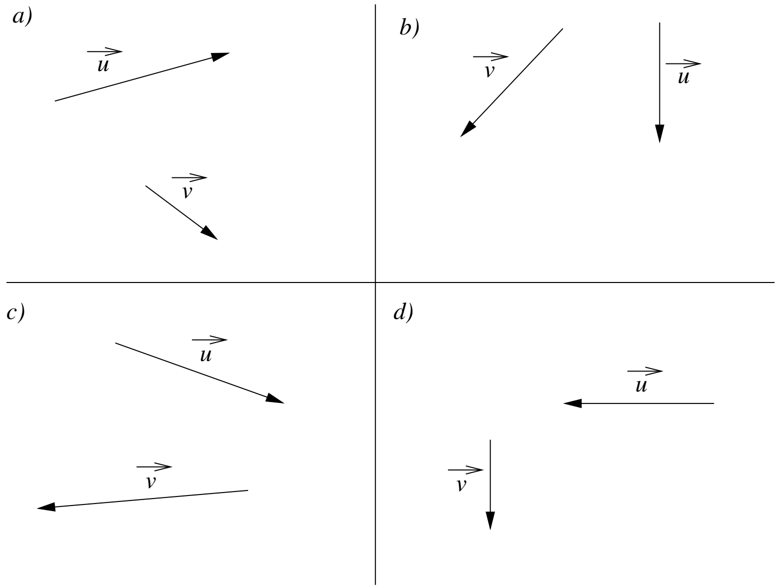
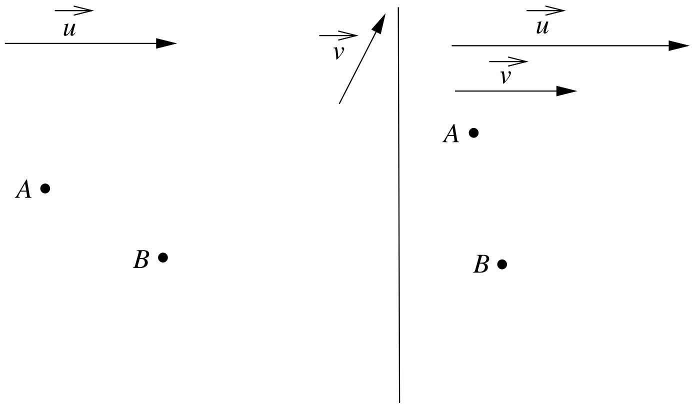
Vecteurs et produit scalaire

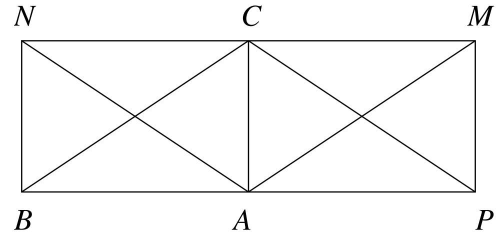
▶ Exercice n°1
Tracer $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ dans chacun des cas suivants :



▶ Exercice n°2
Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ dans les cas suivants :



▶ Exercice n°3



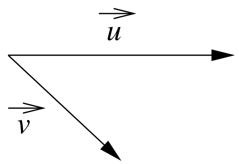
Dans la configuration ci-dessus, compléter les égalités suivantes :

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{B...}$; $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A...}$

$\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{C...}$; $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{P...}$

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{C....}$; $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{NA}=.....$

▶ Exercice n°4
Tracer $2\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}+2\overrightarrow{v}$ dans le cas suivant :



▶ Exercice n°5
Écrire le plus simplement possible en utilisant la relation de Chasles :
$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$

▶ Exercice n°6
Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ dans les cas suivants (les mesures d'angle sont en radians) :

1. $\|\overrightarrow{u}\|=3$ $\quad\|\overrightarrow{v}\|=7$ $\quad(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{4}$
2. $\|\overrightarrow{u}\|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\|\overrightarrow{v}\|=\sqrt{2}$ $\quad(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\frac{\pi}{3}$

3. $\|\overrightarrow{u}\| = 4 \qquad \|\overrightarrow{v}\| = \dfrac{3}{2} \qquad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \dfrac{3\pi}{4}$

▶ Exercice n°7

On donne $\|\overrightarrow{u}\| = 2\sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 3$.
Calculer $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. En déduire les mesures possibles de l'angle $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

▶ Exercice n°8

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2+\sqrt{3}\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°9

Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ et $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°10

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et donner les mesures possibles de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ dans les cas suivants :

1. $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
2. $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°11

Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ou non dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\10\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\\sqrt{3}+2\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°12

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur que m doit prendre pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2-m\\5\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}3\\-1+m\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}m\\m-8\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}m-3\\1\end{pmatrix}$

▶ Exercice n°13

On considère les points $A\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix}$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

▶ Exercice n°14

On considère les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$.

1. Calculer en fonction de x le produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.
2. En déduire les valeurs possibles de x pour que le triangle AMB soit rectangle en M.
3. Pour chacune des valeurs de x trouvées à la question précédente, calculer la distance IM où I est le milieu de $[AB]$.

▶ Exercice n°15

On donne $\|\overrightarrow{u}\| = 2 \qquad \|\overrightarrow{v}\| = 3 \qquad (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.

1. Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}^2$ et $\overrightarrow{v}^2$.
2. En déduire les produits scalaires suivants :
   a) $(3\overrightarrow{u})\cdot(-4\overrightarrow{v})$
   b) $(-7\overrightarrow{u})\cdot(-7\overrightarrow{v})$
   c) $\overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$
   d) $(\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v})\cdot(2\overrightarrow{v})$
   e) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$
   f) $(\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$
   g) $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2$
   h) $(2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2$

▶ Exercice n°16

On considère $ABCD$ un carré de côté 2, I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[DC]$. On note θ une mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.

1. Calculer les distances AI et AJ. En déduire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ en utilisant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. En déduire $\cos\theta$ et une valeur approchée à 0,01 près de θ.

▶ Exercice n°17

Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.
2. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $A\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
3. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

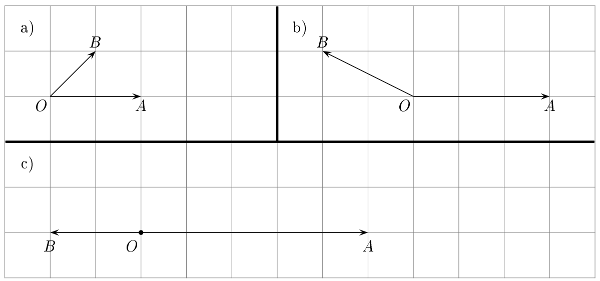
▶ Exercice n°18

Montrer que les équations suivantes sont des équations de cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

1. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

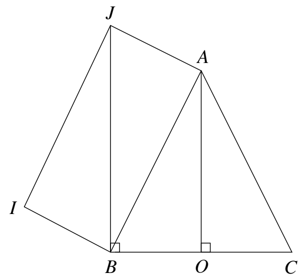
▶ Exercice n°19

Déterminer dans chacun des cas suivants le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (un carreau représente une unité) :



▶ Exercice n°20

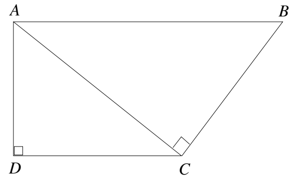
Dans la figure ci-dessous : ABC est un triangle isocèle en A, $AIBJ$ est un parallélogramme et $BC = 4$.



Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI}$.

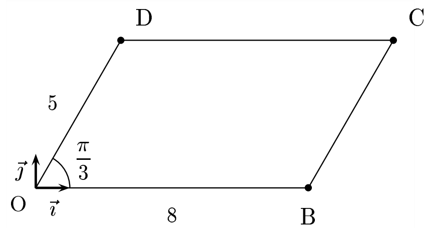
▶ Exercice n°21

Dans la figure ci-dessous : $ABCD$ est un trapèze rectangle et $(AC) \perp (BC)$.
En exprimant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, montrer que $AC^2 = AB \times CD$.



▶ Exercice n°22

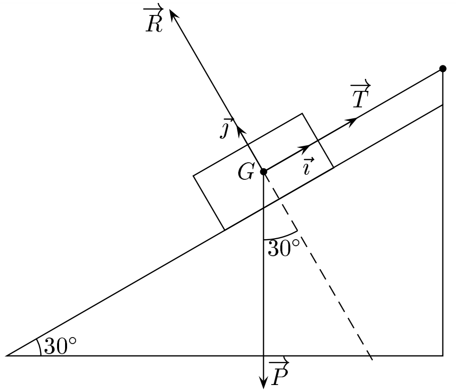
Dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ on considère le parallélogramme OBCD ci-dessous :



1. Déterminer les coordonnées du point D.
2. En utilisant que $\overrightarrow{BD}^2 = \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}\right)^2$, déterminer la distance BD.
3. Calculer l'aire du parallélogramme.
4. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BD}$. En déduire $\cos\left(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BD}\right)$

► Exercice n°23

Un solide de centre de gravité G est en équilibre sur un plan incliné de 30°.

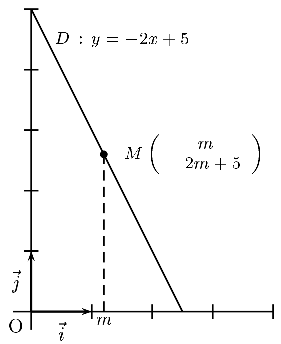


Ce solide est soumis à trois forces : le poids $\overrightarrow{P}$, la réaction du support $\overrightarrow{R}$ et la tension de la corde $\overrightarrow{T}$. On se place dans le repère orthonormé $\left(G, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{T}$ en fonction de leurs longueurs $\|\overrightarrow{P}\|$, $\|\overrightarrow{R}\|$ et $\|\overrightarrow{T}\|$
2. On suppose que $\|\overrightarrow{P}\| = 30$ newtons. Le système étant en équilibre, on doit avoir $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$. En déduire $\|\overrightarrow{R}\|$ et $\|\overrightarrow{T}\|$.

► Exercice n°24

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = -2x + 5$ et pour tout réel m compris entre 0 et 2.5, on note M le point de la droite D d'abscisse m.



Un élève prétend que la distance OM ne peut jamais être inférieure à $\sqrt{5}$ et on cherche à vérifier cette affirmation.

Partie A : approche expérimentale

On cherche à établir un algorithme qui vérifie expérimentalement l'affirmation de l'élève.
Pour cela, on utilise la méthode dite de « balayage » :
Pour chaque valeur de m (en partant de 0) on calcule la distance OM correspondante et on augmente la valeur de m de 0.01 tant que m n'a pas atteint 2.5.

1. Montrer que, pour tout m, la distance OM est égale à $\sqrt{5m^2 - 20m + 25}$.
2. Compléter les lignes 3 et 9 pour que l'algorithme ci-dessous permette de détecter s'il existe un point M pour lequel la distance OM est inférieure à $\sqrt{5}$.

```
 1: DEBUT_ALGORITHME
 2:   m ← 0
 3:   TANT_QUE (m<=.............)
 4:     DEBUT_TANT_QUE
 5:     SI √(5m²-20m+25) < √5  ALORS
 6:       DEBUT_SI
 7:       AFFICHER "il y a un point tel que OM < √5"
 8:       FIN_SI
 9:     m ← ...................
10:     FIN_TANT_QUE
11: FIN_ALGORITHME
```

3. Peut-on être sur que cet algorithme puisse dire de façon totalement fiable s'il n'existe aucun point M tel que $OM < \sqrt{5}$?

Partie B : approche algébrique

1. Montrer que pour tout m compris entre 0 et 2.5, on a : $OM = \sqrt{5} \times \sqrt{(m-2)^2 + 1}$.
2. En déduire la valeur minimale que peut prendre la distance OM. Pour quelle valeur de m obtient-on cette distance minimale ?

► Exercice n°25

La condition « $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens contraire » est-elle nécessaire et/ou suffisante pour que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \leqslant 0$?