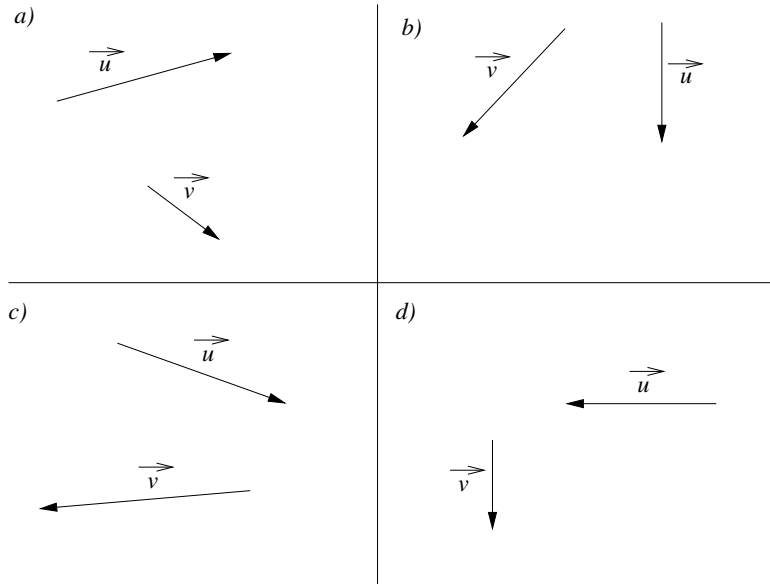


# Vecteurs et produit scalaire

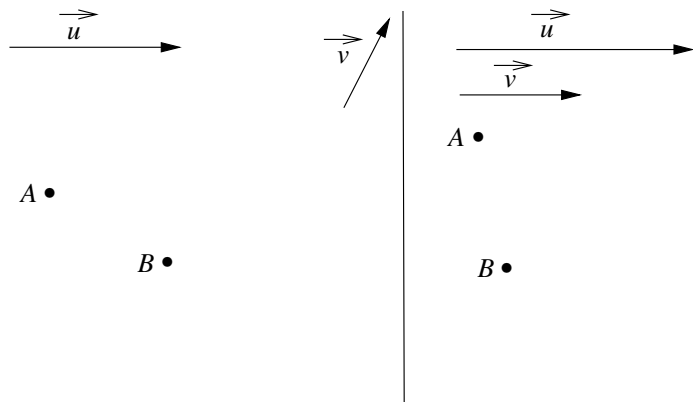
## ► Exercice n°1

Tracer  $\vec{u} + \vec{v}$  dans chacun des cas suivants :

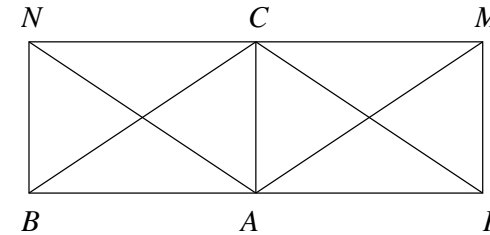


## ► Exercice n°2

Construire les points  $M$  et  $N$  tels que  $\vec{AM} = \vec{u} + \vec{v}$  et  $\vec{BN} = \vec{u} - \vec{v}$  dans les cas suivants :



## ► Exercice n°3



Dans la configuration ci-dessus, compléter les égalités suivantes :

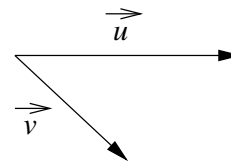
$$\vec{BA} + \vec{CM} = \vec{B...} \quad ; \quad \vec{AM} + \vec{AB} = \vec{A...}$$

$$\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{C...} \quad ; \quad \vec{MC} + \vec{AB} = \vec{P...}$$

$$\vec{BC} - \vec{PM} = \vec{C...} \quad ; \quad \vec{NB} + \vec{CA} - \vec{NA} = \dots$$

## ► Exercice n°4

Tracer  $2\vec{u} + \vec{v}$  et  $\frac{1}{2}\vec{u} + 2\vec{v}$  dans le cas suivant :



## ► Exercice n°5

Écrire le plus simplement possible en utilisant la relation de Chasles :

$$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$\vec{v} = \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB}$$

$$\vec{w} = \vec{BC} - \vec{BA} + \vec{BD} - \vec{BC}$$

## ► Exercice n°6

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans les cas suivants (les mesures d'angle sont en radians) :

- $\|\vec{u}\| = 3 \quad \|\vec{v}\| = 7 \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$
- $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

$$3. \|\vec{u}\| = 4 \quad \|\vec{v}\| = \frac{3}{2} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$$

► **Exercice n°7**

On donne  $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ .

Calculer  $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ . En déduire les mesures possibles de l'angle  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

► **Exercice n°8**

Calculer le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  dans les cas suivants :

$$1. \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

► **Exercice n°9**

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\cos(\vec{u}, \vec{v})$  dans les cas suivants :

$$1. \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

► **Exercice n°10**

Calculer  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ,  $\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$  et donner les mesures possibles de l'angle  $(\vec{AB}, \vec{AC})$  dans les cas suivants :

$$1. A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2. A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

► **Exercice n°11**

Déterminer si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux ou non dans les cas suivants :

$$1. \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{3} + 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 \\ \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix}$$

► **Exercice n°12**

Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur que  $m$  doit prendre pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux.

$$1. \vec{u} \begin{pmatrix} 2 - m \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 + m \end{pmatrix}$$

$$2. \vec{u} \begin{pmatrix} m \\ m - 8 \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} m - 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

► **Exercice n°13**

On considère les points  $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

Montrer que le triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  et calculer son aire.

► **Exercice n°14**

On considère les points  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $M \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- Calculer en fonction de  $x$  le produit scalaire  $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ .
- En déduire les valeurs possibles de  $x$  pour que le triangle  $AMB$  soit rectangle en  $M$ .
- Pour chacune des valeurs de  $x$  trouvées à la question précédente, calculer la distance  $IM$  où  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

► **Exercice n°15**

On donne  $\|\vec{u}\| = 2$   $\|\vec{v}\| = 3$   $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ .

- Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u}^2$  et  $\vec{v}^2$ .
- En déduire les produits scalaires suivants :
  - $(3\vec{u}) \cdot (-4\vec{v})$
  - $(-7\vec{u}) \cdot (-7\vec{v})$
  - $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
  - $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{v})$
  - $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
  - $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$
  - $(\vec{u} + \vec{v})^2$
  - $(2\vec{u} - \vec{v})^2$

► **Exercice n°16**

On considère  $ABCD$  un carré de côté 2,  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $J$  le milieu de  $[DC]$ .  
On note  $\theta$  une mesure de l'angle  $\widehat{IAJ}$ .

1. Calculer les distances  $AI$  et  $AJ$ . En déduire  $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$  en fonction de  $\cos \theta$ .
2. Calculer  $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$  en utilisant les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AD}$ .
3. En déduire  $\cos \theta$  et une valeur approchée à 0,01 près de  $\theta$ .

► **Exercice n°17**

Déterminer une équation du cercle  $\mathcal{C}$  dans les cas suivants :

1.  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $\Omega \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et de rayon 4.
2.  $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $I \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  passant par  $A \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ .
3.  $\mathcal{C}$  est le cercle de diamètre  $[AB]$  avec  $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

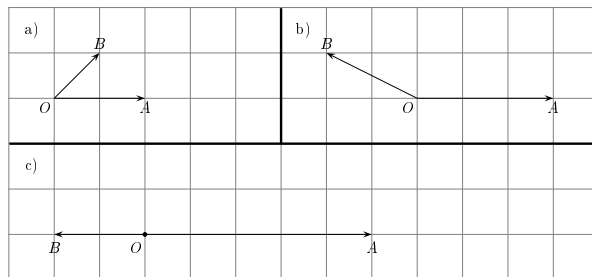
► **Exercice n°18**

Montrer que les équations suivantes sont des équations de cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

1.  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$
2.  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

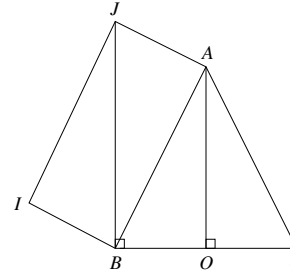
► **Exercice n°19**

Déterminer dans chacun des cas suivants le produit scalaire  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  (un carreau représente une unité) :



► **Exercice n°20**

Dans la figure ci-dessous :  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$ ,  $AIBJ$  est un parallélogramme et  $BC = 4$ .

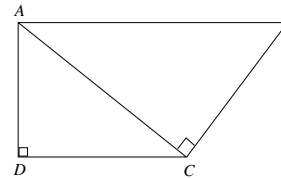


Calculer les produits scalaires  $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{JC}$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{AJ}$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{IA}$ ,  $\vec{BO} \cdot \vec{BI}$  et  $\vec{BC} \cdot \vec{CI}$ .

► **Exercice n°21**

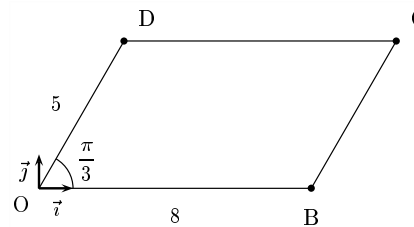
Dans la figure ci-dessous :  $ABCD$  est un trapèze rectangle et  $(AC) \perp (BC)$ .

En exprimant de deux façons différentes le produit scalaire  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ , montrer que  $AC^2 = AB \times CD$ .



► **Exercice n°22**

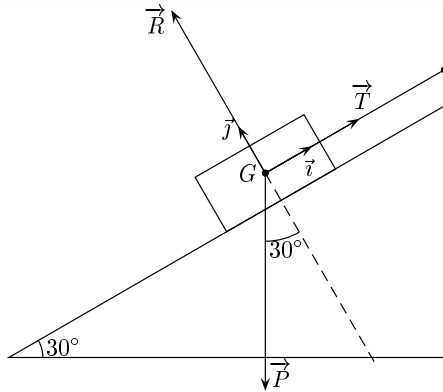
Dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère le parallélogramme OBCD ci-dessous :



1. Déterminer les coordonnées du point D.
2. En utilisant que  $\vec{BD}^2 = (\vec{OD} - \vec{OB})^2$ , déterminer la distance BD.
3. Calculer l'aire du parallélogramme.
4. Déterminer la valeur de  $\vec{BO} \cdot \vec{BD}$ . En déduire  $\cos(\widehat{BO, BD})$

► **Exercice n°23**

Un solide de centre de gravité  $G$  est en équilibre sur un plan incliné de  $30^\circ$ .

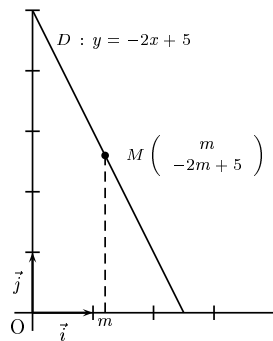


Ce solide est soumis à trois forces : le poids  $\vec{P}$ , la réaction du support  $\vec{R}$  et la tension de la corde  $\vec{T}$ . On se place dans le repère orthonormé  $(G, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{P}$ ,  $\vec{R}$  et  $\vec{T}$  en fonction de leurs longueurs  $\|\vec{P}\|$ ,  $\|\vec{R}\|$  et  $\|\vec{T}\|$
- On suppose que  $\|\vec{P}\| = 30$  newtons. Le système étant en équilibre, on doit avoir  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = \vec{0}$ . En déduire  $\|\vec{R}\|$  et  $\|\vec{T}\|$ .

► **Exercice n°24**

Dans un repère orthonormé, on considère la droite  $D$  d'équation  $y = -2x + 5$  et pour tout réel  $m$  compris entre 0 et 2.5, on note  $M$  le point de la droite  $D$  d'abscisse  $m$ .



Un élève prétend que la distance  $OM$  ne peut jamais être inférieure à  $\sqrt{5}$  et on cherche à vérifier cette affirmation.

**Partie A : approche expérimentale**

On cherche à établir un algorithme qui vérifie expérimentalement l'affirmation de l'élève. Pour cela, on utilise la méthode dite de « balayage » :

Pour chaque valeur de  $m$  (en partant de 0) on calcule la distance  $OM$  correspondante et on augmente la valeur de  $m$  de 0.01 tant que  $m$  n'a pas atteint 2.5.

- Montrer que, pour tout  $m$ , la distance  $OM$  est égale à  $\sqrt{5m^2 - 20m + 25}$ .
- Compléter les lignes 6 et 13 pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous permette de détecter s'il existe un point  $M$  pour lequel la distance  $OM$  est inférieure à  $\sqrt{5}$ .

```

1: VARIABLES
2: m EST_DU_TYPE NOMBRE
3: distance EST_DU_TYPE NOMBRE
4: DEBUT_ALGORITHME
5:   m PREND_LA_VALEUR 0
6:   TANT_QUE (m<=.....)
7:     DEBUT_TANT_QUE
8:       distance PREND_LA_VALEUR sqrt(5*m*m-20*m+25)
9:       SI (distance<sqrt(5)) ALORS
10:        DEBUT_SI
11:          AFFICHER "il y a un point tel que OM < sqrt(5)"
12:        FIN_SI
13:       m PREND_LA_VALEUR .....
14:     FIN_TANT_QUE
15: FIN_ALGORITHME

```

- Peut-on être sûr que cet algorithme puisse dire de façon totalement fiable s'il n'existe aucun point  $M$  tel que  $OM < \sqrt{5}$  ?

**Partie B : approche algébrique**

- Montrer que pour tout  $m$  compris entre 0 et 2.5, on a :  $OM = \sqrt{5} \times \sqrt{(m-2)^2 + 1}$ .
- En déduire la valeur minimale que peut prendre la distance  $OM$ . Pour quelle valeur de  $m$  obtient-on cette distance minimale ?

► **Exercice n°25**

La condition «  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraire » est-elle nécessaire et/ou suffisante pour que  $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq 0$  ?