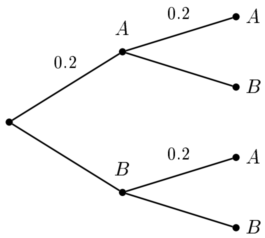
Probabilités (première partie)

▶ Exercice n°1
L'arbre pondéré ci-dessous modélise la répétition, de façon identique et indépendante, d'une même épreuve ayant pour seules issues A et B.



1. Compléter l'arbre.
2. Déterminer la probabilité que l'événement B ne soit réalisé qu'une seule fois après les deux épreuves.

▶ Exercice n°2
On tire deux cartes avec remise dans un jeu de 32 cartes et on s'intéresse uniquement au fait de savoir si les cartes tirées sont des carreaux ou non.

1. Construire un arbre pondéré répondant à la situation.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : « sur les 2 cartes tirées, il y a un carreau et un seul »
   - B : « sur les 2 cartes tirées, il n'y a aucun carreau »

▶ Exercice n°3
On lance trois fois de suite un dé et on s'intéresse uniquement au fait de savoir si l'on obtient un entier pair ou non.

1. Construire un arbre pondéré répondant à la situation.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : « on obtient 3 entiers pairs »
   - B : « on obtient exactement 2 entiers pairs »

▶ Exercice n°4
Une urne contient 3 jetons bleus et 2 jetons rouges. On tire successivement 3 jetons avec remise.

1. Construire un arbre pondéré répondant à la situation.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : « obtenir 3 jetons rouges »
   - B : « obtenir 3 jetons bleus »
   - C : « obtenir 3 jetons qui ne sont pas tous de la même couleur »

▶ Exercice n°5
Une urne contient un certain nombre de jetons rouges, bleus et verts et on tire deux jetons avec remise. On sait que :

- La probabilité d'obtenir deux jetons rouges est égale à 0,09 ;
- La probabilité que l'un des jetons soit rouge et que l'autre soit bleu est égal est égale à 0,12.

1. Construire et compléter l'arbre pondéré correspondant à la situation.
2. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - A : « obtenir 2 jetons verts »
   - B : « obtenir un jeton bleu et un jeton vert »

▶ Exercice n°6
Le président d'une association organise une tombola. Tous les billets, au nombre de 500, sont vendus.
L'un des billets permet de gagner un lot d'une valeur de 124 euros, 9 billets permettent chacun de gagner un lot d'une valeur de 14 euros, 50 billets sont remboursés, les autres sont perdants.

1. Les billets sont vendus 1 euro. Que rapportera la tombola à l'association ?
2. On note X le gain effectif obtenu par un joueur (c'est à dire la différence entre la somme gagnée et la somme misée). Déterminer la loi de probabilité associée à X et calculer son espérance.

▶ Exercice n°7
Dans un jeu de 32 cartes, on associe à chaque carte une valeur en euros suivant le tableau ci-dessous :

Carte	As	Roi	Dame	Valet	Dix	Neuf	Huit	Sept
Valeur	13	11	11	5	5	5	3	1

Un joueur mise 5 euros, tire une carte au hasard et reçoit la valeur en euros associée à cette carte.
On note X la variable aléatoire correspondante au gain effectif (différence entre la somme gagnée et la somme misée).

1. Calculer la probabilité que le joueur perde de l'argent.
2. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

▶ Exercice n°8

Une urne contient 2 jetons verts et un jeton rouge. On tire 2 jetons avec remise.

1. Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation.
2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons verts obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.

▶ Exercice n°9

Le tableau suivant représente la loi de probabilité associée à une variable aléatoire.

x_i	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	p	$\frac{1}{8}$

1. Déterminer la valeur de p.
2. Calculer $p(X \geqslant 0)$ et $p(X < 1)$.
3. Calculer l'espérance de X.

▶ Exercice n°10

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si la carte tirée est un as, on gagne 10 points.
- Si la carte tirée est un roi, on gagne 4 points.
- Si la carte tirée est une dame, on gagne 1 point.

Pour toutes les autres cartes, on perd un certain nombre a de points ($a > 0$).

1. Définir la loi de probabilité de X, la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus.
2. Déterminer la valeur de a pour laquelle l'espérance mathématique est nulle.

▶ Exercice n°11

Un jeu consiste à lancer deux dés, un rouge et un noir. Pour pouvoir jouer il faut payer 1 euro. On gagne 3 euros si la somme des points est supérieure ou égale à 9, 1 euro si la somme des points est inférieure ou égale à 4 et rien dans les autres cas.

On cherche à savoir combien peut-on espérer gagner en moyenne si on joue un grand nombre de fois à ce jeu. Pour cela, on appelle « gain effectif », la différence entre la somme gagnée et la somme misée

Partie A : recherche d'un algorithme de simulation

On cherche à établir un algorithme simulant 100 000 participations à ce jeu et donnant le gain effectif moyen obtenu. Compléter les lignes 8 et 12 de l'algorithme ci-dessous pour qu'il réponde au problème :

```
1:  DEBUT_ALGORITHME
2:    somme_gains_effectifs ← 0
3:    POUR numero_tirage ALLANT_DE 1 A 100000
4:      DEBUT_POUR
5:      resultat ← entier au hasard entre 1 et 6
6:      SI (resultat>=9) ALORS
7:        DEBUT_SI
8:        somme_gains_effectifs ← somme_gains_effectifs+..........
9:        FIN_SI
10:     SI (resultat>=5 ET resultat<=8) ALORS
11:       DEBUT_SI
12:       somme_gains_effectifs ← ...............................
13:       FIN_SI
14:     FIN_POUR
15:   gain_moyen ← somme_gains_effectifs/100000
16:   AFFICHER gain_moyen
17: FIN_ALGORITHME
```

Pourquoi l'algorithme ne traite-t-il pas le cas où `resultat` est inférieur ou égal à 4 ?

Partie B : analyse théorique

1. Compléter le tableau suivant en indiquant dans chaque case la somme des points obtenus :

dé rouge/dé noir	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Compléter alors le tableau suivant donnant la probabilité d'obtenir toutes les sommes de points possible :

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité											

3. On note X la variable aléatoire qui donne le gain effectif obtenu par un joueur. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.