

## Applications de la dérivation

### ► Exercice n°1

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 1.

### ► Exercice n°2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 6x + 5$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer l'abscisse des points d'intersection entre la courbe  $C_f$  et la droite  $D$  d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 2$ .

### ► Exercice n°3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $-3$ .

### ► Exercice n°4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Préciser la valeur de  $f(-1)$ . En déduire le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### ► Exercice n°5

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$  par  $f(x) = \frac{x+3}{2x-3}$ .

### ► Exercice n°6

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ .

### ► Exercice n°7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-4x-4}{x^2+2x+5}$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer les coordonnées du point  $A$ , intersection entre la courbe  $C_f$  et l'axe des abscisses.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe  $C_f$  au point  $A$ .

### ► Exercice n°8

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{-4x+8}{x^2-4x+5}$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Déterminer les coordonnées du point  $A$ , intersection entre la courbe  $C_f$  et l'axe des abscisses.
3. Montrer que la tangente  $T$  à  $C_f$  au point  $A$  a pour équation  $y = -4x + 8$ .
4. Factoriser et étudier le signe de  $f(x) - (-4x + 8)$ . En déduire la position de la courbe  $C_f$  par rapport à la tangente  $T$ .

### ► Exercice n°9

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x^2-x+1}$ .

### ► Exercice n°10

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{0; 3\}$  par  $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x^2-6x}$ .

### ► Exercice n°11

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = x + 1 + \frac{9}{x-1}$ .

### ► Exercice n°12

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+1}$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Étudier la position relative de la courbe  $C_f$  et de la droite  $D$  d'équation  $y = x - 1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Déterminer une équation de  $T$ , la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer qu'il existe deux points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite  $D$ .
5. Calculer et étudier le signe de  $f(x) - x$ . En déduire, que pour tout  $x$ , on a  $f(x) \leq x$ .

### ► Exercice n°13

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$ .

1. Calculer et factoriser  $f'(x)$ .
2. Étudier les variations de  $f$ .

- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses et déterminer une équation des tangentes à la courbe en ces points.
- Montrer qu'il existe un point de la courbe où la tangente  $T$  admet un coefficient directeur égal à 1. Donner une équation de  $T$ .

► **Exercice n°14**

On admet que lorsque la vitesse d'une voiture est comprise entre 20 et 130 km·h<sup>-1</sup>, la consommation d'essence en fonction de la vitesse  $v$  (en km·h<sup>-1</sup>) est donnée par :  $C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}$ . En étudiant les variations de la fonction  $C$ , déterminer la vitesse pour laquelle la consommation est minimale.

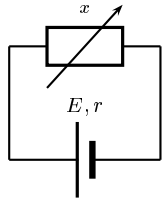
► **Exercice n°15**

Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$  par

$$f(x) = 6 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right).$$

► **Exercice n°16**

Dans le circuit ci-dessous, le générateur de force électromotrice  $E = 15$  volts et de résistance interne  $r = 10$  ohms est branché avec une résistance variable :



La puissance en watts dissipée dans la résistance variable est définie par

$$P(x) = \frac{225x}{(10+x)^2} \text{ avec } x \in [0; 80].$$

Dresser le tableau de variations de  $P$  et déterminer la valeur de  $x$  pour laquelle la puissance dissipée est maximale.

Donner la valeur de cette puissance maximale.

► **Exercice n°17**

On considère trois nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  et leur moyenne  $\bar{x} = \frac{a+b+c}{3}$ . On note  $f$  la fonction (mesurant la « distance » avec  $a$ ,  $b$  et  $c$ ) définie par :

$$f(x) = \frac{(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2}{3}.$$

- Dériver  $f$  et montrer que  $f'(x) = 2(x - \bar{x})$ .
- Dresser le tableau de variations de  $f$  et montrer que le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est égal à la variance de la série formée par les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

► **Exercice n°18**

On considère une casserole de rayon  $x$  et de hauteur  $h$  (on ne tient pas compte de la poignée).

- Exprimer le volume  $V$  de la casserole en fonction de  $x$  et de  $h$ .
- Montrer que la surface  $S$  de la casserole est égale à  $\pi x^2 + \frac{2V}{x}$ .
- Pour un volume  $V$  donné (donc constant), on cherche à déterminer  $x$  pour que la surface  $S$  soit minimale. Pour cela on considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = \pi x^2 + \frac{2V}{x}$ .  
Dériver  $f$  et montrer que  $f'$  s'annule pour  $x = h$ .

► **Exercice n°19**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Quelle est la contraposée de la propriété suivante :

« Si ,pour tout  $x$ ,  $f'(x) = 0$  alors  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$  »