d) Tirage de 4 jetons

1. En imaginant ce que serait l'arbre correspondant :

- déterminer $\binom{4}{0}$ (nb de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 0 jeton rouge lors de ce tirage de 4 jetons). $\binom{4}{0} = \ldots\ldots.$
- déterminer $\binom{4}{4}$ (nb de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir 4 jetons rouges lors de ce tirage de 4 jetons). $\binom{4}{4} = \ldots\ldots.$

2. Sans réaliser l'arbre complet, la situation au dernier niveau de l'arbre peut se résumer ainsi :

pour les 3 premiers jetons tirés	*pour le quatrième jeton*
un chemin donnant 0 jeton rouge pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{0}$ *chemins de ce type)*	R B
un chemin donnant 1 jeton rouge pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{1}$ *chemins de ce type)*	R B
un chemin donnant 2 jetons rouges pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{2}$ *chemins de ce type)*	R B
un chemin donnant 3 jetons rouges pour les 3 premiers jetons tirés *(il y a* $\binom{3}{3}$ *chemins de ce type)*	R B

• Quelles sont les deux seules façons d'obtenir 1 seul jeton rouge sur les 4 jetons tirés ?

En déduire que $\binom{4}{1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

• Quelles sont les deux seules façons d'obtenir exactement 2 jetons rouges sur les 4 jetons tirés ?

En déduire que $\binom{4}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

• Quelles sont les deux seules façons d'obtenir exactement 3 jetons rouges sur les 4 jetons tirés ?

En déduire que $\binom{4}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. Compléter alors le tableau suivant :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges	4 jetons rouges
Pour 1 jeton tiré	$\binom{1}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{1}{1} = \ldots\ldots$	■	■	■
Pour 2 jetons tirés	$\binom{2}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{2}{2} = \ldots\ldots$	■	■
Pour 3 jetons tirés	$\binom{3}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{3}{3} = \ldots\ldots$	■
Pour 4 jetons tirés	$\binom{4}{0} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{1} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{2} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{3} = \ldots\ldots$	$\binom{4}{4} = \ldots\ldots$

e) Cas général

On tire maintenant n jetons avec remise et, pour tout entier k compris entre 1 et n, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins dans l'arbre qui permettent d'obtenir k jetons rouges lors de ce tirage de n jetons.
En extrapolant le mécanisme établi pour 4 jetons, on peut en déduire :

nombre de chemins donnant :	$\cdots$	$(k-1)$ jetons rouges	k jetons rouges	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
Pour $(n-1)$ jetons tirés	$\cdots$	$\binom{n-1}{k-1}$	$\binom{n-1}{k}$	$\cdots$
Pour n jetons tirés	$\cdots$	$\cdots$	$\binom{n}{k} =$	$\cdots$

Compléter alors le tableau suivant :

nombre de chemins donnant :	0 jeton rouge	1 jeton rouge	2 jetons rouges	3 jetons rouges	4 jetons rouges	5 jetons rouges
Pour 4 jetons tirés	$\binom{4}{0}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{1}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{2}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{3}=\ldots\ldots$	$\binom{4}{4}=\ldots\ldots$	■
Pour 5 jetons tirés	$\binom{5}{0}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{1}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{2}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{3}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{4}=\ldots\ldots$	$\binom{5}{5}=\ldots\ldots$

f) Application aux calculs de probabilités

On suppose maintenant que la boîte contient 4 jetons rouges et 6 jetons bleus et on tire successivement 5 jetons avec remise.

1. On cherche à déterminer, sans construire d'arbre, la probabilité d'obtenir exactement 2 jetons rouges lors de ce tirage à l'aide du raisonnement suivant :

- Chaque chemin de l'arbre comportant exactement 2 jetons rouges (exemples : RRBBB, RBBRB...) , doit aussi contenir 3 jetons bleus.
  La probabilité de l'événement correspondant à un chemin de ce type est donc égale à ....
- Or le nombre de chemins de l'arbre donnant 2 jetons rouges est égal à $\binom{5}{2}=\ldots\ldots$
- La probabilité d'avoir exactement 2 jetons rouges lors de ce tirage s'obtient en faisant la somme des probabilités de tous les chemins donnant 2 jetons rouges.

  Elle est donc égale à ....

2. Par un raisonnement similaire, on peut déterminer que la probabilité d'avoir exactement 3 jetons rouges

lors de ce tirage est égale à ....

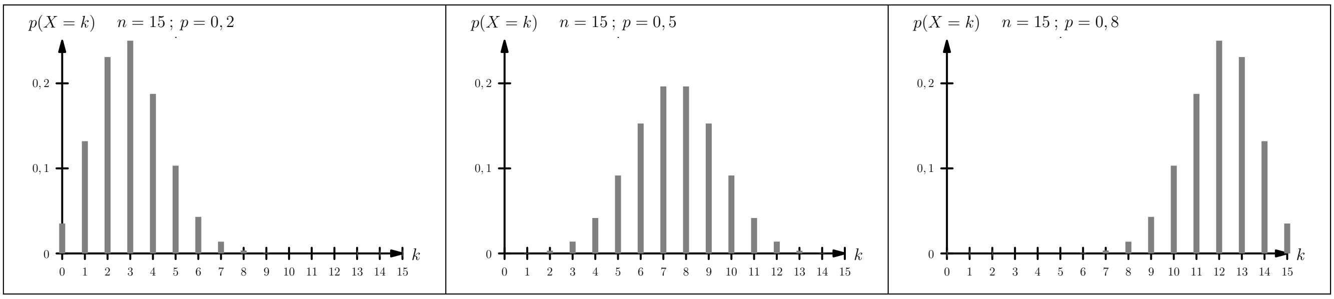
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons rouges obtenus lors de ce tirage de 5 jetons avec remise.

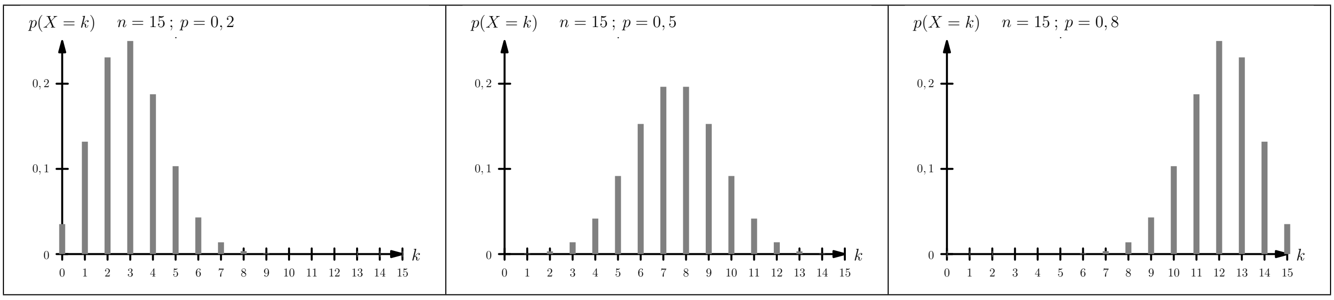
- Déterminer $p(X=0)$. $p(X=0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Déterminer $p(X=1)$. $p(X=1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Déterminer $p(X=4)$. $p(X=4)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
- Déterminer $p(X=5)$. $p(X=5)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

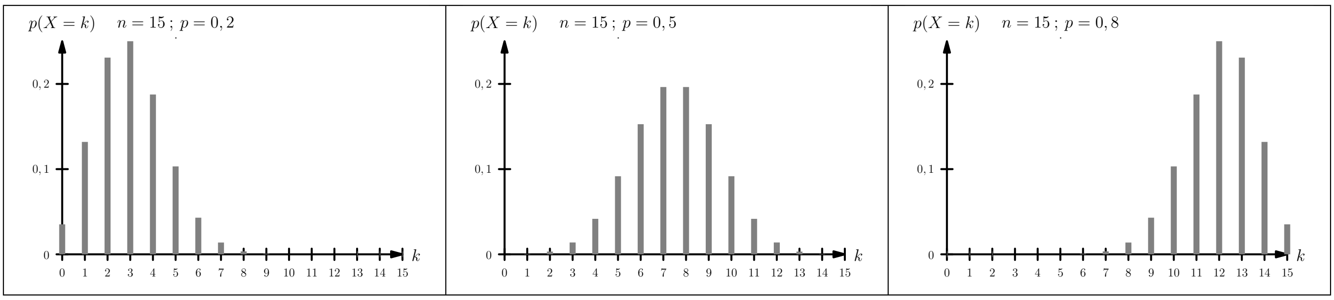
Compléter le tableau suivant (qui donne la loi de probabilité de X) :

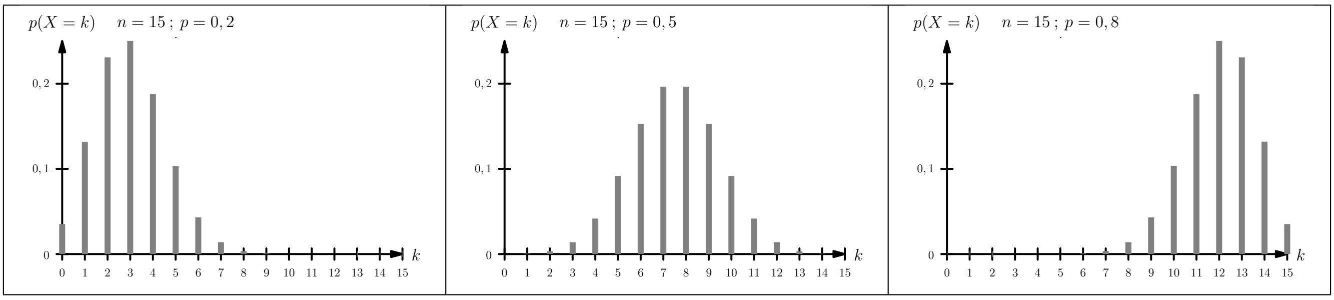
Valeurs possibles de X	0	1	2	3	4	5
Probabilité						

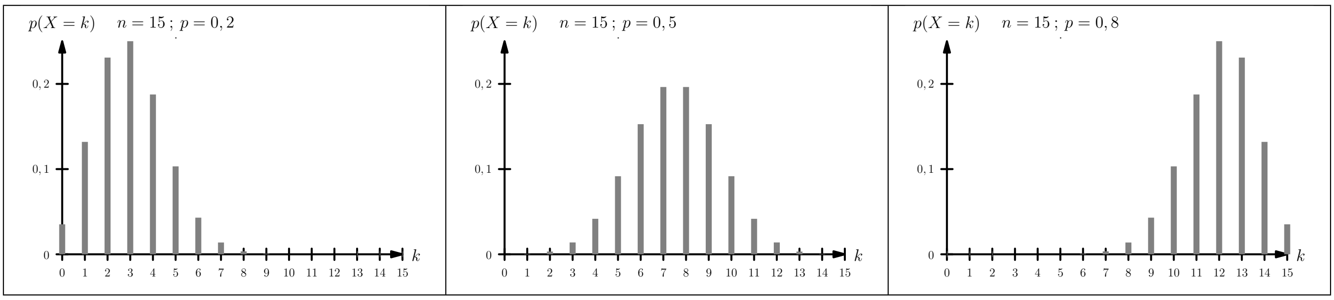
Calculer l'espérance de X (c'est à dire le nombre moyen de jetons rouges que l'on peut espérer en répétant ce tirage un grand nombre de fois) :

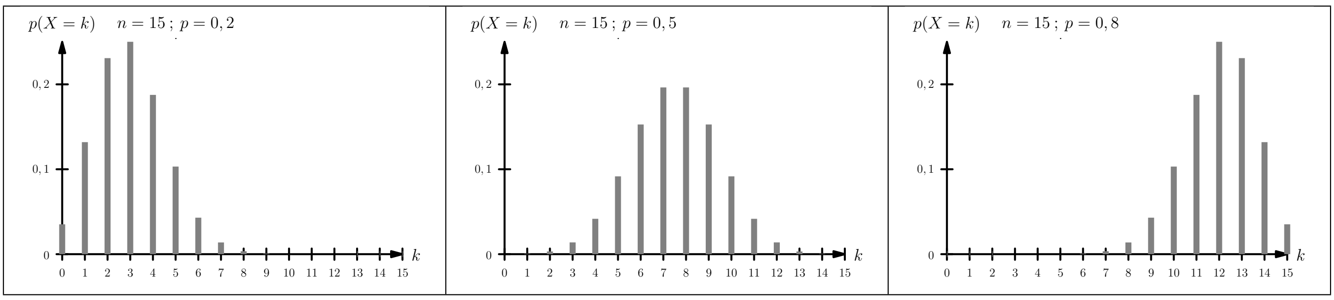

p(X = k) n = 15 ; p = 0,2
p(X = k) n = 15 ; p = 0,5
p(X = k) n = 15 ; p = 0,8
0,2
0,1
0
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


p(X = k) n = 15 ; p = 0,2
p(X = k) n = 15 ; p = 0,5
p(X = k) n = 15 ; p = 0,8
0,2
0,1
0
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


p(X = k) n = 15 ; p = 0,2
p(X = k) n = 15 ; p = 0,5
p(X = k) n = 15 ; p = 0,8
0,2
0,1
0
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


p(X = k) n = 15 ; p = 0,2
p(X = k) n = 15 ; p = 0,5
p(X = k) n = 15 ; p = 0,8
0,2
0,1
0
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


p(X = k) n = 15 ; p = 0,2
p(X = k) n = 15 ; p = 0,5
p(X = k) n = 15 ; p = 0,8
0,2
0,1
0
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


p(X = k) n = 15 ; p = 0,2
p(X = k) n = 15 ; p = 0,5
p(X = k) n = 15 ; p = 0,8
0,2
0,1
0
k
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15