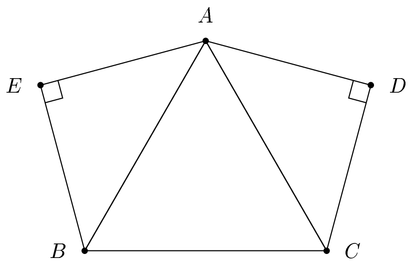
Angles orientés - Trigonométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé **direct** $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ et k représente un entier (positif ou négatif).

▶ Exercice n°1

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et ADC et AEB sont des triangles rectangles isocèles.

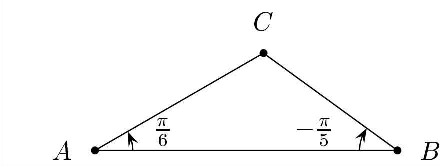


Déterminer une mesure des angles orientés suivants :

- $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$
- $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$
- $\left(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA}\right)$
- $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$
- $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$
- $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)$

▶ Exercice n°2

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = -\dfrac{\pi}{5} + 2k\pi$.

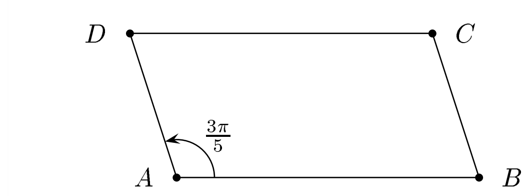


Déterminer une mesure des angles orientés suivants :

- $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\right)$
- $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$
- $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

▶ Exercice n°3

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{3\pi}{5} + 2k\pi$.



Déterminer une mesure des angles orientés suivants :

- $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$
- $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)$
- $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)$

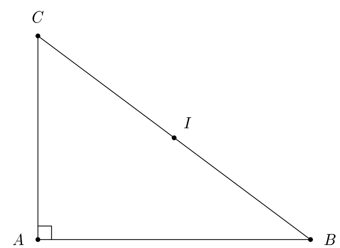
▶ Exercice n°4

Déterminer la mesure principale des angles orientés de mesure :

$\dfrac{13\pi}{6}$; $-\dfrac{37\pi}{3}$; $\dfrac{19\pi}{6}$; $-\dfrac{21\pi}{8}$; $\dfrac{23\pi}{4}$; $-\dfrac{121\pi}{4}$; $\dfrac{1001\pi}{3}$; 11π ; -20π ; 1998π ; 235π

▶ Exercice n°5

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu de $[BC]$.



1. Déterminer et représenter l'ensemble E_1 des points M tels que $\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{AB}\right) = 0\ + 2k\pi$
2. Déterminer et représenter l'ensemble E_2 des points M tels que $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CA}\right) = \pi\ + 2k\pi$
3. Déterminer et représenter l'ensemble E_3 des points M tels que $\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ + 2k\pi$

▶ Exercice n°6

1. Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ et $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = \sqrt{3} - 2$ et $x \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

▶ Exercice n°7

1. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{3}{4}$; $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$; $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.
3. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$; $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

▶ Exercice n°8

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :

- $A(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + 2\sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)$
- $B(x) = \cos(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
- $C(x) = \sin(\pi + x) + \sin(3\pi - x) + \sin(x - 7\pi) - \sin(9\pi - x)$
- $D(x) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin(5\pi - x)$

▶ Exercice n°9

Déterminer les valeurs exactes de :
$\cos\left(\dfrac{7\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\dfrac{31\pi}{6}\right)$; $\sin(-15\pi)$; $\cos(10\pi)$; $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}\right)$

▶ Exercice n°10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin x = 1$.
3. $2(\sin x)^2 - 1 = 0$.
4. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$.
5. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x$.
6. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

▶ Exercice n°11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos x = -\dfrac{6}{5}$.
3. $\cos x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
5. $\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

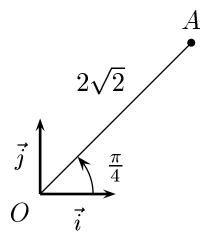
▶ Exercice n°12

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(2x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
2. $-2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$.

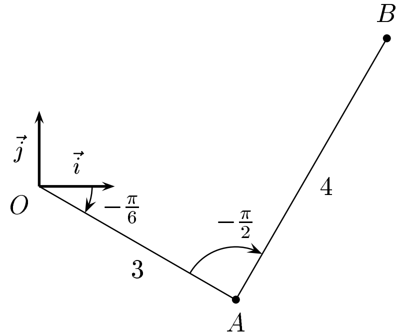
▶ Exercice n°13

Déterminer l'abscisse et l'ordonnée du point A tel qu'il est défini dans la figure suivante :



▶ Exercice n°14

On considère les points A et B tels qu'ils sont définis dans la figure suivante :



1. Déterminer l'abscisse et l'ordonnée du point A.
2. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{AB}\right)$.
3. En déduire l'abscisse et l'ordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
4. Déterminer l'abscisse et l'ordonnée du point B.

▶ Exercice n°15

Déterminer la distance OM et une mesure de l'angle $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$ dans les cas suivants :

1. $M\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $M\begin{pmatrix} -2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$
3. $M\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ -6 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°16

On cherche à déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est de la forme $\dfrac{n\pi}{d}$ (avec $n > 0$ et $d > 0$) en enlevant 2π tant que cela est nécessaire.

1. Compléter le calcul suivant : $\dfrac{n\pi}{d} - 2\pi = \dfrac{(\qquad\qquad)\pi}{d}$.
2. Compléter les lignes 14 et 16 pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous réponde à la question.

```
 1: VARIABLES
 2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: d EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: DEBUT_ALGORITHME
 5:   LIRE n
 6:   LIRE d
 7:   SI (n>0 ET d>0 ) ALORS
 8:     DEBUT_SI
 9:     AFFICHER "mesure principale de "
10:     AFFICHER n
11:     AFFICHER "*pi/"
12:     AFFICHER d
13:     AFFICHER " : "
14:     TANT_QUE (...........) FAIRE
15:       DEBUT_TANT_QUE
16:       n PREND_LA_VALEUR .....................
17:       FIN_TANT_QUE
18:     AFFICHER n
19:     AFFICHER "*pi/"
20:     AFFICHER d
21:     FIN_SI
22: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°17

On considère trois points distincts deux à deux A, B et C et la proposition suivante :
« Si A, B et C sont alignés alors la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est égale à 0. »

1. Cette proposition est-elle vraie ?
2. Énoncer la réciproque de cette proposition.
3. La réciproque est-elle vraie ?