Suites

▶ Exercice n°1

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \dfrac{2n}{n+3}$.

1. Calculer U_0, U_3 et U_{n+1}.

2. Compléter la ligne 6 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il permette de calculer U_n après avoir entré n.

```
1: VARIABLES
2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
3: U EST_DU_TYPE NOMBRE
4: DEBUT_ALGORITHME
5:   LIRE n
6:   U PREND_LA_VALEUR ...........
7:   AFFICHER U
8: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°2

L'algorithme ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon explicite.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
U EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  U PREND_LA_VALEUR n/(n+1)
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

1. Déterminer U_n en fonction de n.

2. Calculer U_9 et U_{n+1}.

▶ Exercice n°3

Soit (U_n) la suite définie par $U_{n+1} = 5 - 3U_n$ et $U_0 = 1$.

1. Calculer U_0, U_1 et U_2.

2. Compléter la ligne 10 de l'algorithme AlgoBox ci-dessous pour qu'il permette de calculer U_n après avoir entré n.

```
1: VARIABLES
2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
3: U EST_DU_TYPE NOMBRE
4: i EST_DU_TYPE NOMBRE
5: DEBUT_ALGORITHME
6:   U PREND_LA_VALEUR 1
7:   LIRE n
8:   POUR i ALLANT_DE 1 A n
9:     DEBUT_POUR
10:    U PREND_LA_VALEUR .........
11:    FIN_POUR
12:  AFFICHER U
13: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°4

L'algorithme ci-dessous permet de calculer le terme de rang n d'une suite (U_n) définie de façon récurrente.

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
U EST_DU_TYPE NOMBRE
i EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 2
  LIRE n
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR 4*U-3
    FIN_POUR
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

1. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
2. Calculer U_1 et U_2.

▶ Exercice n°5

(U_n) est la suite telle que $U_0 = 1$; $U_1 = \dfrac{1}{2}$; $U_2 = \dfrac{1}{3}$; $U_3 = \dfrac{1}{4}$; $U_4 = \dfrac{1}{5}$ ...
Déterminer une formule qui donne U_n directement en fonction de n.

▶ Exercice n°6

(U_n) est la suite telle que $U_0 = 1$; $U_1 = 2$; $U_2 = 5$; $U_3 = 10$; $U_4 = 17$ ...
Déterminer une formule qui donne U_n directement en fonction de n.

▶ Exercice n°7

(U_n) est la suite telle que $U_0 = -5$; $U_1 = 7$; $U_2 = 19$; $U_3 = 31$; $U_4 = 43$ ...
Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

▶ Exercice n°8

(U_n) est la suite telle que $U_0 = \dfrac{1}{2}$; $U_1 = -\dfrac{1}{4}$; $U_2 = \dfrac{1}{8}$; $U_3 = -\dfrac{1}{16}$; $U_4 = \dfrac{1}{32}$ ...
Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

▶ **Exercice n°9**
Calculer, pour tout n, $U_{n+1} - U_n$ et donner le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = 3 - 7n$
2. $U_n = n^2 - n$
3. $U_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$
4. $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = U_n - \dfrac{1}{n+1}$

▶ **Exercice n°10**
Calculer, pour tout n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ et donner le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = \dfrac{2^n}{5}$
2. $U_n = \dfrac{n+2}{n+1}$
3. $U_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$

▶ **Exercice n°11**
En utilisant les variations d'une fonction, étudier le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $U_n = n + n^2$
2. $U_n = \dfrac{1-n}{n+2}$

▶ **Exercice n°12**
En choisissant la méthode qui parait la plus adaptée, étudier le sens de variation de la suite (U_n) dans les cas suivants :

1. $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = -2 + U_n \end{cases}$
2. $U_n = \dfrac{\sqrt{3}}{5^n}$
3. $U_n = 5 \times (-3)^n$
4. $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = U_n - (U_n)^2 \end{cases}$

▶ **Exercice n°13**
Soit (U_n) la suite arithmétique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 5$.

1. Calculer U_2 et U_{13}.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ **Exercice n°14**
Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ telle que $U_4 = 25$. Calculer U_7 et U_0.

▶ **Exercice n°15**
Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_4 = 5$ et $U_{11} = 19$. Calculer sa raison r et son premier terme U_0.

▶ **Exercice n°16**
Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_2 + U_3 + U_4 = 15$ et $U_6 = 20$. Calculer U_0 et la raison r.

▶ **Exercice n°17**
Déterminer si la suite (U_n) est arithmétique ou non dans les cas suivants :

1. $U_n = 2n - 3$
2. $U_n = n^2$
3. $U_n = -\frac{1}{3}n + 11$.

▶ **Exercice n°18**
Soit (U_n) la suite arithmétique de raison $r = 3$ telle que $U_0 = 1$.

1. Exprimer U_n en fonction de n.
2. Calculer $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10}$.

▶ **Exercice n°19**
Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

1. Calculer U_2 et U_5.
2. Exprimer U_n en fonction de n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ **Exercice n°20**
Soit (U_n) la suite géométrique de premier terme $U_0 = 32$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

1. Calculer U_3 et U_6.
2. Exprimer U_n en fonction de n.

3. Quel est le sens de variation de la suite (U_n) ?

▶ Exercice n°21

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q = 3$ telle que $U_4 = 81$.
Calculer U_0, puis U_7.

▶ Exercice n°22

Soit (U_n) la suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $U_4 = 10$ et $U_6 = 250$.
Calculer la raison q et U_0.

▶ Exercice n°23

Pour quelles valeurs de q la suite géométrique (U_n) de raison q vérifie t'elle $2U_2 = 3U_1 - U_0$ (avec $U_0 \neq 0$) ?

▶ Exercice n°24

Déterminer si la suite (U_n) est géométrique ou non dans les cas suivants :

1. $U_n = -4 \times 5^n$.
2. $U_n = \dfrac{1}{2n+1}$.
3. $U_n = (-3)^{2n+1}$

▶ Exercice n°25

Un produit coûte actuellement 10 euros. Il est prévu que son prix augmente de 8 % par an.
On pose $U_0 = 10$ et on note U_n le prix prévu du produit au bout de n années.

1. Comment passe-t-on du prix d'une année au prix de l'année suivante ?
2. La suite (U_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?
3. On cherche à déterminer au bout de combien d'années le prix du produit aura doublé à l'aide de l'algorithme ci-dessous :

```
 1: VARIABLES
 2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: U EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: DEBUT_ALGORITHME
 5:   n PREND_LA_VALEUR 0
 6:   U PREND_LA_VALEUR 10
 7:   TANT_QUE (U<.....) FAIRE
 8:     DEBUT_TANT_QUE
 9:     U PREND_LA_VALEUR U*1.08
10:     n PREND_LA_VALEUR n+1
11:     FIN_TANT_QUE
12:   AFFICHER n
13: FIN_ALGORITHME
```

Compléter la ligne 7 pour que l'algorithme réponde à la question.

▶ Exercice n°26

La valeur d'une action est actuellement de 100 euros. Il est prévu que cette valeur baisse de 10 % par mois.
On pose $U_0 = 100$ et on note U_n la valeur de l'action au bout de n mois. On cherche à déterminer au bout de combien de mois le cours de l'action aura diminué de moitié à l'aide de l'algorithme ci-dessous :

```
 1: VARIABLES
 2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: U EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: DEBUT_ALGORITHME
 5:   n PREND_LA_VALEUR 0
 6:   U PREND_LA_VALEUR 100
 7:   TANT_QUE (.......) FAIRE
 8:     DEBUT_TANT_QUE
 9:     U PREND_LA_VALEUR ..........
10:     n PREND_LA_VALEUR n+1
11:     FIN_TANT_QUE
12:   AFFICHER n
13: FIN_ALGORITHME
```

Compléter les lignes 7 et 9 pour que l'algorithme réponde à la question.

▶ Exercice n°27

La période de désintégration d'un élément radioactif est le temps au bout duquel la masse d'un échantillon est divisée par 2 (cette période est constante).

1. On note U_0 la masse initiale de l'élément radioactif et U_n sa masse au bout de n périodes de désintégration. Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite (U_n).
2. Un échantillon contient 5 g de radium. Quelle sera sa masse dans 10500 ans, sachant que la période de désintégration du radium est de 1500 ans.
3. La période de désintégration de l'iode 131 est de 8 jours. Quelle était, il y a 120 jours, la masse de l'iode 131 dans un échantillon qui en referme aujourd'hui 1 g ?

▶ Exercice n°28

Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^7 + 3^8$
2. $S_2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots + \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{128}$

▶ Exercice n°29

Un salarié a reçu deux propositions de salaire.

1. **Proposition 1 :** La première année, un salaire annuel de 20000 euros puis chaque année une augmentation fixe de 450 euros.

On pose $U_0 = 20000$, U_1 le salaire au bout d'un an, ..., U_n le salaire au bout de n années.
Calculer U_1 et U_2.
Préciser si (U_n) est arithmétique ou géométrique et exprimer U_n en fonction de n.

2. **Proposition 2 :** La première année, un salaire annuel de 19900 euros puis chaque année une augmentation de 2%.
On pose $V_0 = 19900$, V_1 le salaire au bout d'un an, ..., V_n le salaire au bout de n années.
Calculer V_1 et V_2.
Préciser si (V_n) est arithmétique ou géométrique et exprimer V_n en fonction de n.

3. Au début la proposition 1 semble meilleure que la proposition 2 pour le salarié. Afin de déterminer si cela reste le cas dans la durée, on cherche à construire un algorithme qui précise la proposition donnant le meilleur salaire annuel pour les 20 prochaines années.
Compléter les lignes 8, 9 et 13 ci-dessous pour que l'algorithme AlgoBox proposé réponde à la question. (rappel : la syntaxe AlgoBox pour x^n est `pow(x,n)`)

```
 1: VARIABLES
 2: n EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: U EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: V EST_DU_TYPE NOMBRE
 5: DEBUT_ALGORITHME
 6:   POUR n ALLANT_DE 1 A 20
 7:     DEBUT_POUR
 8:     U PREND_LA_VALEUR .................
 9:     V PREND_LA_VALEUR .................
10:     AFFICHER "Au bout de la "
11:     AFFICHER n
12:     AFFICHER " ième année, "
13:     SI (.......) ALORS
14:       DEBUT_SI
15:       AFFICHER "la proposition 1 est la meilleure"
16:       FIN_SI
17:     SINON
18:       DEBUT_SINON
19:       AFFICHER "la proposition 2 est la meilleure"
20:       FIN_SINON
21:     FIN_POUR
22: FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n°30

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+U_n}$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = \dfrac{1}{U_n}$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison.
3. En déduire une expression de V_n, puis de U_n en fonction de n.

▶ Exercice n°31

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3U_n - 2$.

1. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 1$ est géométrique.
2. En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

▶ Exercice n°32

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n - 1$.

1. Montrer que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n + \dfrac{3}{2}$ est géométrique.
2. En déduire V_n, puis U_n en fonction de n.
3. Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

▶ Exercice n°33

Une agence de voyages propose un programme de fidélité à certains de ses clients.
- En 2012, 120 000 clients de l'agence ont bénéficié de ce programme de fidélité.
- Un modèle prévoit que chaque année 10% des clients qui avaient bénéficié du programme de fidélité l'année précédente sortent du programme et que 2 000 nouveaux clients rentrent dans ce programme.

On note :
- U_0 le nombre de clients ayant bénéficié du programme de fidélité en 2012. On a donc $U_0 = 120\,000$.
- U_n le nombre de clients bénéficiant du programme de fidélité pendant l'année $(2012 + n)$ selon le modèle.

1. Expliquer pourquoi on peut affirmer que, pour tout entier positif n, $U_{n+1} = 0{,}9 \times U_n + 2\,000$.
2. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 20\,000$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   b) Calculer V_0 et exprimer V_n en fonction de n.
   c) En déduire U_n en fonction de n.
   d) Quel devrait-être le nombre de clients bénéficiant du programme de fidélité pendant l'année 2017 selon ce modèle ?

► Exercice n°34

Une étude prospective prévoit que, chaque mois de l'année 2013, la supérette d'une petite ville perde 10% de sa clientèle du mois précédent, mais gagne 50 nouveaux clients. Au mois de janvier 2013, le supermarché comptait 1000 clients. On note :

- U_0, le nombre de clients au mois de janvier 2013. On a donc $U_0 = 1000$.
- U_n, le nombre prévisible de clients au cours du $(n+1)^{\text{ème}}$ mois de l'année 2013, selon ce modèle.

1. Expliquer pourquoi on peut affirmer que, pour tout entier positif n, $U_{n+1} = 0{,}9 \times U_n + 50$.
2. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 500$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison égale à 0,9.
   b) Calculer V_0 et exprimer V_n en fonction de n.
   c) Montrer que, pour tout entier positif n, $U_n = 500 + 500 \times 0{,}9^n$.
   d) Quel devrait-être le nombre de clients de la supérette en juin 2013 selon ce modèle ? *(on arrondira le résultat à une unité près)*

► Exercice n°35

Dans une certaine région, l'accroissement de la population de lièvres diminue de moitié chaque année. On note $P_0 = 500\,000$ la population initiale, $P_1 = 700\,000$ la population au bout de un an et P_n la population au bout de n années.

On a donc, pour tout n, $P_{n+2} - P_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(P_{n+1} - P_n\right)$.

1. Calculer P_2 et P_3.
2. On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :
   $U_n = P_{n+1} - P_n$ et $V_n = P_{n+1} - \dfrac{1}{2}P_n$.
   a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique et exprimer U_n en fonction de n.
   b) Montrer que (V_n) est une suite constante. En déduire la valeur de V_n, pour tout n.
   c) Montrer que $2\left(V_n - U_n\right) = P_n$ et exprimer P_n en fonction de n.
   d) Calculer P_{10}.

► Exercice n°36

Algorithmique et calcul de sommes

On considère l'algorithme AlgoBox ci-dessous :

```
 1: VARIABLES
 2: somme EST_DU_TYPE NOMBRE
 3: n EST_DU_TYPE NOMBRE
 4: DEBUT_ALGORITHME
 5:   somme PREND_LA_VALEUR 0
 6:   POUR n ALLANT_DE 1 A 100
 7:     DEBUT_POUR
 8:     somme PREND_LA_VALEUR somme+sqrt(n)
 9:     FIN_POUR
10:   AFFICHER somme
11: FIN_ALGORITHME
```

1. Compléter les phrases ci-dessous :
   - Quand n vaut 1 et que la ligne 8 est exécutée, la variable somme a pour nouvelle valeur ....
   - Quand n vaut 2 et que la ligne 8 est exécutée, la variable somme a pour nouvelle valeur ....
   - Quand n vaut 3 et que la ligne 8 est exécutée, la variable somme a pour nouvelle valeur ....
2. Que permet de calculer cet algorithme ?