Produit scalaire

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

▶ Exercice n°1
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a-2 \\ 3a \end{pmatrix}$ $\quad (a \in \mathbb{R})$

▶ Exercice n°2
Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ou non dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°3
Dans chacun des cas suivants, déterminer la valeur que m doit prendre pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ soient orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2-m \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -1+m \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} m \\ m-8 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} m-3 \\ 1 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°4
On considère les points $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

▶ Exercice n°5
On considère les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

▶ Exercice n°6
On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que : $\|\overrightarrow{u}\| = 2$, $\|\overrightarrow{v}\| = 3$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 1$.

1. Calculer $\overrightarrow{u}^2$ et $\overrightarrow{v}^2$.
2. En déduire $(2\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v})^2$, $(-3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$ et $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 - (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2$.

▶ Exercice n°7
Soit D la droite d'équation $\sqrt{3}x + 3y + 5 = 0$ et D' la droite d'équation $-2\sqrt{3}x + 2y + 4 = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur de D et D'.
2. Déterminer si les droites D et D' sont perpendiculaires on non.
3. Déterminer un vecteur normal de D et D'.

▶ Exercice n°8
On considère le point $A\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et D la droite d'équation $x - 3y + 5 = 0$.

Déterminer une équation de la droite D' perpendiculaire à D et passant par A.

▶ Exercice n°9
On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation des hauteurs issues de A et B du triangle ABC.
   En déduire les coordonnées de H, l'orthocentre du triangle ABC.
2. Déterminer une équation des médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$.
   En déduire les coordonnées de Ω, le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

▶ Exercice n°10
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ dans les cas suivants :

1. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de rayon 4.
2. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ passant par $A\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
3. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

▶ Exercice n°11

On considère les points $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation de la tangente en B au cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B.
2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.

▶ Exercice n°12

Montrer que les équations suivantes sont des équations de cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

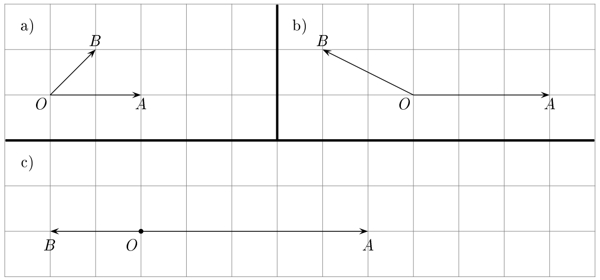
1. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$
3. $3x^2 + 3y^2 + 16x - 12y = 0$

▶ Exercice n°13

Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 1$.

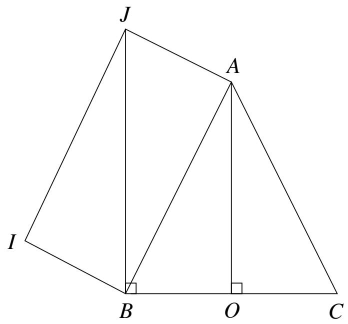
▶ Exercice n°14

Déterminer dans chacun des cas suivants le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (un carreau représente une unité) :



▶ Exercice n°15

Dans la figure ci-dessous : ABC est un triangle isocèle en A, $AIBJ$ est un parallélogramme et $BC = 4$.



Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CI}$.

▶ Exercice n°16

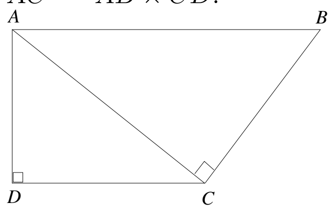
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et A, B et C trois points distincts de $\mathcal{C}$. On note H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), D l'intersection entre la hauteur (AH) et le cercle $\mathcal{C}$ et E le point du cercle diamétralement opposé à A.

Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AH}$.

▶ Exercice n°17

Dans la figure ci-dessous : $ABCD$ est un trapèze rectangle et $(AC) \perp (BC)$.

En exprimant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, montrer que $AC^2 = AB \times CD$.



▶ Exercice n°18

Soit ABC un triangle rectangle en A, A' le milieu de $[BC]$, H le projeté orthogonal de A sur (BC). Le point H se projette orthogonalement en I sur (AB) et en J sur (AC).

1. Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$
2. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
3. Montrer que les droites (AA') et (IJ) sont perpendiculaires.

▶ Exercice n°19

Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ et $\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ dans les cas suivants :

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

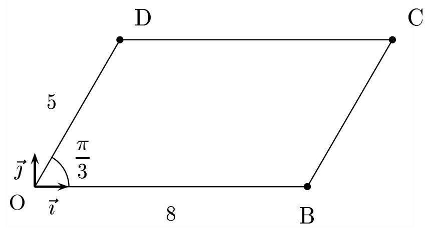
▶ Exercice n°20

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et donner les mesures possibles de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ dans les cas suivants :

1. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
2. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

▶ Exercice n°21

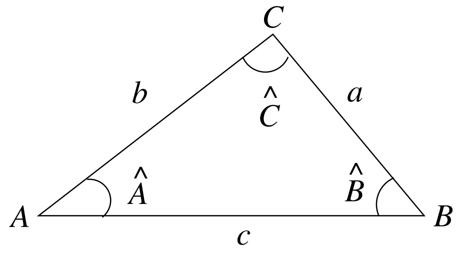
On considère le parallélogramme OBCD ci-dessous :



1. Déterminer les coordonnées du point D.
2. En utilisant que $\overrightarrow{\mathrm{BD}}^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2$, déterminer la distance BD.
3. Calculer l'aire du parallélogramme.
4. Déterminer la valeur de $\overrightarrow{\mathrm{BO}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$. En déduire $\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{BO}},\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)$

▶ Exercice n°22

On considère le triangle ABC ci-dessous et on note S son aire :



1. En développant le carré scalaire $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2$, montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
2. Soit H le pied de la hauteur issue de C. Exprimer CH en fonction de b et de $\sin\widehat{A}$. En déduire que $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$.
3. Montrer que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{abc}{2S}$. En déduire que $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$
4. Que vaut b si $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{6}$, $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{6}$ et $a = 1$?
5. Que vaut a si $\widehat{A} = \dfrac{2\pi}{3}$, $b = 1$ et $c = 2$?
6. Que vaut l'aire du triangle si $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{3}$, $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$?

▶ Exercice n°23

En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

▶ Exercice n°24

Réduire les expressions suivantes :

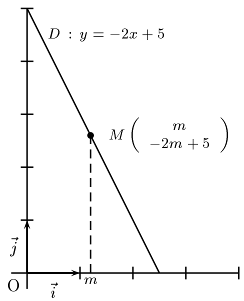
- $A(x) = \cos(3x)\cos x + \sin(3x)\sin x$
- $B(x) = \sin(4x)\cos x + \cos(4x)\sin x$
- $C(x) = \sin(-5x)\cos(4x) - \cos(5x)\sin(4x)$

▶ Exercice n°25

En utilisant que $3x = 2x + x$, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.

▶ Exercice n°26

Dans un repère orthonormé, on considère la droite D d'équation $y = -2x + 5$ et pour tout réel m compris entre 0 et 2.5, on note M le point de la droite D d'abscisse m.



Un élève prétend que la distance OM ne peut jamais être inférieure à $\sqrt{5}$ et on cherche à vérifier cette affirmation.

Partie A : approche expérimentale

On cherche à établir un algorithme qui vérifie expérimentalement l'affirmation de l'élève. Pour cela, on utilise la méthode dite de « balayage » :
Pour chaque valeur de m (en partant de 0) on calcule la distance OM correspondante et on augmente la valeur de m de 0.01 tant que m n'a pas atteint 2.5.

1. Montrer que, pour tout m, la distance OM est égale à $\sqrt{5m^2 - 20m + 25}$.

2. Compléter les lignes 6, 8 et 13 pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous permette de détecter s'il existe un point M pour lequel la distance OM est inférieure à $\sqrt{5}$.

```
1: VARIABLES
2: m EST_DU_TYPE NOMBRE
3: distance EST_DU_TYPE NOMBRE
4: DEBUT_ALGORITHME
5:   m PREND_LA_VALEUR 0
6:   TANT_QUE (m<=..........) FAIRE
7:     DEBUT_TANT_QUE
8:     distance PREND_LA_VALEUR ...................
9:     SI (distance<sqrt(5)) ALORS
10:      DEBUT_SI
11:      AFFICHER "il y a un point pour lequel OM < sqrt(5)"
12:      FIN_SI
13:    m PREND_LA_VALEUR ...............
14:    FIN_TANT_QUE
15: FIN_ALGORITHME
```

3. Peut-on être sur que cet algorithme puisse dire de façon totalement fiable s'il n'existe aucun point M tel que $OM < \sqrt{5}$?

Partie B : approche algébrique

1. Montrer que pour tout m compris entre 0 et 2.5, on a $OM = \sqrt{5} \times \sqrt{(m-2)^2 + 1}$.
2. En déduire la valeur minimale que peut prendre la distance OM. Pour quelle valeur de m obtient-on cette distance minimale ?

Partie C : approche géométrique

On note H le projeté orthogonal de O sur la droite D.

1. Calculer les coordonnées du point H.
2. Calculer la distance OH. Que constate-t-on ?

▶ Exercice n°27

La condition « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire » est-elle nécessaire et/ou suffisante pour que $\vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant 0$?