Probabilités (deuxième partie)

▶ Exercice n°1
On lance simultanément cinq pièces de monnaies et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de « face » obtenu.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement trois fois « face ».
3. Calculer la probabilité de n'obtenir aucune fois « face ».
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois « face ».

▶ Exercice n°2
On lance six fois de suite un dé et on s'intéresse uniquement au fait d'obtenir « 5 ou 6 » ou « ni 5, ni 6 ». On note X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où on obtient « 5 ou 6 ».

1. X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, en donner les paramètres.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux fois « 5 ou 6 ».

▶ Exercice n°3
Une urne contient des jetons noirs et des jetons blancs. Le nombre de jetons noirs est le triple du nombre de jetons blancs.

1. On tire au hasard un jeton. Quelle est la probabilité que ce jeton soit noir ?
2. On tire à présent 4 jetons successivement avec remise et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de jetons noirs obtenu.
   a) X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, en donner les paramètres.
   b) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 jetons noirs ?
   c) Calculer la probabilité d'obtenir exactement 2 ou 3 jetons noirs ?
   d) Quelle est l'espérance de X ? Que représente ce nombre ?

▶ Exercice n°4
Dans une fabrication d'objets en série, 8 % de ces objets présentent un défaut. Un carton contient 10 objets. La présence d'un défaut pour un objet est indépendante de l'objet choisi.

1. Calculer la probabilité que, dans le carton, les dix objets soient sans défaut.
2. Calculer la probabilité que, dans le carton, au moins 8 objets soient sans défaut.

▶ Exercice n°5
La probabilité qu'une machine tombe en panne un jour, indépendamment du jour, est de 0,05.

1. Calculer la probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne.
2. Calculer la probabilité qu'en cinq jours, la machine ne tombe pas en panne plus d'une journée.

▶ Exercice n°6
Un vendeur propose des encyclopédies à domicile. Il visite 10 clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des clients sont indépendantes. X est le nombre d'encyclopédies vendues en une journée.

1. Exprimer $p(X = k)$ en fonction de k (pour k entier compris entre 0 et 10).
2. Calculer l'espérance de X.
3. Le vendeur gagne 100 euros par encyclopédie vendue. Quel gain moyen le vendeur peut-il espérer.

▶ Exercice n°7
Vous jouez avec un ami de même force que vous à un jeu. Les résultats de deux parties sont indépendants.
Qu'est-ce qui est le plus probable :

- « gagner deux parties sur quatre »
- « gagner quatre parties sur huit »

▶ Exercice n°8
On s'intéresse au nombre d'enfants d'une famille. On suppose qu'il n'y a pas de naissances multiples et qu'il y a équiprobabilité pour la naissance d'un garçon ou d'une fille.

Partie A
On suppose que la famille a eu 4 enfants et on note X le nombre de filles.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que la famille ait eu au moins une fille.

Partie B
On cherche à déterminer le nombre minimum d'enfants que la famille devrait avoir pour que la probabilité d'avoir au moins une fille soit supérieure à 0.99 .

1. On note n le nombre d'enfants. Déterminer, en fonction de n, la probabilité d'avoir au moins une fille.
2. Montrer que répondre au problème posé revient à déterminer le premier entier n tel que $0.5^n \leqslant 0.01$.

3. Compléter la ligne pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous permette de déterminer cet entier. (rappel : `pow(0.5,n)` permet de calculer 0.5^n)

```
VARIABLES
n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  n PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (pow(0.5,n)..........) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

► Exercice n°9

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 4x^3(1-x)$.
Étudier les variations de f sur $[0\,;\,1]$.

Partie B

Lors d'un contrôle de qualité dans une usine fabriquant des disques durs, on prélève de façon indépendante un disque dur de 4 postes de fabrication.
On note p la probabilité qu'un disque dur soit défectueux (on suppose que cette probabilité est la même d'un poste à l'autre). On note X le nombre de disques durs défectueux parmi les 4 prélevés.

1. Calculer, en fonction de p, la probabilité que X soit égal à 3.
2. En utilisant les résultats de la partie A, déterminer pour quelle valeur de p la probabilité d'avoir 3 disques durs défectueux est maximale.

► Exercice n°10

Une urne contient 10 jetons rouges et 10 jetons noirs. On tire successivement n jetons avec remise ($n \geqslant 2$).

1. Montrer que la probabilité d'obtenir exactement un jeton rouge est égale à $\dfrac{n}{2^n}$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (U_n) définie par $U_n = \dfrac{n}{2^n}$ (pour $n \geqslant 2$).

Échantillonnage

► Exercice n°11

Un sous-traitant d'une grande marque de téléviseurs affirme que 90% des écrans produits dans son usine n'ont aucun défaut.
Pour vérifier la fiabilité de l'information, un échantillon de 60 téléviseurs est prélevé au hasard.

1. Déterminer, à l'aide du tableau ci-dessous, l'intervalle de fluctuation à 95% associé à une prise d'échantillons de 60 téléviseurs. (X étant égal au nombre de téléviseurs sans défaut)

k	$p(X \leqslant k)$
...	...
47	0.005681005
48	0.014584685
49	0.034209123
50	0.07306551
...	...
56	0.86260143
57	0.94695492
58	0.98622292
59	0.99820299
60	1

2. Sur les 60 téléviseurs prélevés, 47 n'ont aucun défaut. Peut-on accepter ou rejeter, au seuil de 95%, l'affirmation du sous-traitant ?